ALBI
L3, semestre 1 (2024-2025) - Groupe magistère
Université de Rennes - ENS Rennes

Contrôle continu 1

Exercice 1

Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel. Soit $p \geq 1$ un entier. Énoncer la propriété universelle de $\bigwedge^p E$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On note $\pi : E \to E/F$ la projection canonique. Soit G un sous-espace vectoriel de E. On considère la restriction π_G de π à G : $\pi_G : G \to E/F$.

1. Démontrer que π_G est surjective si et seulement si $E = F + G$.

2. Démontrer que π_G est injective si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Dans toute la suite, on suppose E de dimension finie $n \geqslant 1$.

3. Soit G un supplémentaire de F dans E, et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de G. Montrer que $(\pi(e_{p+1}), \ldots, \pi(e_n))$ est une base de E/F.

Soit E' un autre K-espace vectoriel, et soit $y \in E'$. On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} u & : & E & \to & E \otimes E' \\ & & x & \mapsto & x \otimes y \end{array}$$

4. Montrer que l'application linéaire u est injective si et seulement si $y \neq 0$.

5. On suppose u injective. À quelle condition sur E' l'application transposée de u, notée ${}^t u$, est-elle injective ?

On suppose que $E = K^3$, $E' = K^2$, que l'on munit de leurs bases canoniques (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2) respectives. On munit de plus $E \otimes E'$, E^* et $(E \otimes E')^*$ des bases naturellement associées aux précédentes.

6. Déterminer la matrice de u dans ces bases en fonction des coordonnées de y dans la base (e'_1, e'_2).

7. Déterminer une base du noyau N de ${}^t u$.

Exercice 3

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que K est de caractéristique différente de 2.

1. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ Démontrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \bigwedge^2 E \\ (x, y) & \mapsto & u(x) \wedge v(y) - u(y) \wedge v(x) \end{array}$$

est bilinéaire et alternée.

2. En déduire qu'il existe un unique endomorphisme de $\bigwedge^2 E$, noté $u \wedge v$, tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, $(u \wedge v)(x \wedge y) = u(x) \wedge v(y) - u(y) \wedge v(x)$.

3. Démontrer que $u \wedge v = \bigwedge^2(u+v) - \bigwedge^2 u - \bigwedge^2 v$.

4. Démontrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(\bigwedge^2 E) \\ (u,v) & \mapsto & u \wedge v \end{array}$$

est bilinéaire. Est-elle alternée ? Commenter la notation « $u \wedge v$ ».