UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre linéaire 3

CC1 : durée 1 heure

Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. ***Toutes les réponses devront être dûment justifiées****.*

Exercice 1

Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie. On se donne un endomorphisme u de E et un sous-espace vectoriel F stable par u. On note v l'endomorphisme de E/F induit par u. Montrer que le polynôme minimal de v divise celui de u.

Exercice 2

Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension n. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. On se donne un entier $k \in [\![1, n]\!]$. On rappelle que l'espace vectoriel $\Lambda^k E$ est de dimension $\binom{n}{k}$ et admet pour base les vecteurs $e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(k)}$ où σ parcourt l'ensemble des applications strictement croissantes $\sigma : [\![1, k]\!] \to [\![1, n]\!]$.

1 Montrer qu'il existe une et une seule application K-bilinéaire

$$b : \Lambda^k E \times \Lambda^k (E^*) \to K$$

telle que pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E$ et $(\phi_1, \dots, \phi_k) \in E^*$

$$b\left(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k, \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k\right) = \det\left((\phi_i(x_j))_{i,j \in [\![1,\dots,n]\!]}\right).$$

2 Soient $\sigma, \tau : [\![1, k]\!] \to [\![1, n]\!]$ des applications strictement croissantes. Montrer que

$$b\left(e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(k)}, e^*_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\tau(k)}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3 En déduire que b induit un isomorphisme entre $\Lambda^k(E^*)$ et $(\Lambda^k E)^*$.

Exercice 3

Soient K un corps de caractéristique nulle. On se propose de prouver le résultat suivant : *le K-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d à n variables est engendré par les puissances d-èmes des polynômes homogènes de degré 1.*

Soit $d \geqslant 1$ un entier. On note A le sous-ensemble de $\mathbb{N}^n$ formé des éléments $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tels que $d = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

On note $K[X_1,\dots,X_n]$ le K-espace vectoriel des polynômes en n-variables. Il admet pour base les monômes de la forme $X^\alpha := X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$ où $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$. Si $d\geqslant 1$ est un entier, on note $H_{d,n}$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré d c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de $K[X_1,\dots,X_n]$ engendré par les monômes $X^\alpha = X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in A$.

1 Si $i\in[\![1,n]\!]$ on note $\partial_i\in \mathrm{End}_K(K[X_1,\dots,X_n])$ la dérivée partielle par rapport à la variable X_i c'est-à-dire l'unique application K-linéaire telle que

$$\partial_i(X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}) = \begin{cases} \alpha_i X_1^{\alpha_1}\cdots X_{i-1}^{\alpha_{i-1}} X_i^{\alpha_i-1} X_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\cdots X_n^{\alpha_n} & \text{si } \alpha_i\geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Pour $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$, on pose $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$ et $\alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!$.

Justifiez que pour $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in A$, ∂^α est une forme linéaire sur $H_{d,n}$ puis montrer que $(\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha)_{\alpha\in A}$ est la base duale de $(X^\alpha)_{\alpha\in A}$.

2 Soit $P\in H_{1,n}$ un polynôme homogène de degré 1. On note $x_1,\dots,x_n$ les éléments de K tels que $P = x_1X_1+\cdots+x_nX_n$. Montrer que pour $\alpha\in A$

$$\partial^\alpha(P^d) = d!\,x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

3 Soit E le sous-espace vectoriel de $H_{d,n}$ engendré par les puissances d-ème de polynômes de $H_{1,n}$. Justifiez que l'orthogonal au sens de la dualité

$$E^\perp := \{\phi\in(H_{d,n})^* : \phi(Q)=0\ \ \forall Q\in E\}$$

est réduit à zéro.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : si $P\in K[X_1,\dots,X_n]$ est tel que $P(x_1,\dots,x_n)=0$ pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ alors $P=0$.

4 Conclure.