UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre linéaire 3

CC1 : correction

Exercice 1

Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie. On se donne un endomorphisme u de E et un sous-espace vectoriel F stable par u. On note v l'endomorphisme de E/F induit par u. Montrer que le polynôme minimal de v divise celui de u.

Correction. Notons μ_u et μ_v les polynômes minimaux de u et v. Il suffit par définition de vérifier que μ_u est un polynôme annulateur de v. Notons $\pi : E \to E/F$ la surjection canonique. Comme $v \circ \pi = \pi \circ u$, l'on obtient plus généralement $v^k \circ \pi = \pi \circ u^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ce qui implique que $P(v) \circ \pi = \pi \circ P(u)$ pour tout polynôme $P \in K[X]$. En particulier

$$\mu_u(v) \circ \pi = \pi \circ \mu_u(u) = 0$$

et donc $\mu_u(v) = 0$ puisque π est surjectif. □

Exercice 2

Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension n. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. On se donne un entier $k \in [\![1, n]\!]$. On rappelle que l'espace vectoriel $\Lambda^k E$ est de dimension $\binom{n}{k}$ et admet pour base les vecteurs $e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(k)}$ où σ parcourt l'ensemble des applications strictement croissantes $\sigma : [\![1, k]\!] \to [\![1, n]\!]$.

1 Montrer qu'il existe une et une seule application K-bilinéaire

$$b : \Lambda^k E \times \Lambda^k (E^*) \to K$$

telle que pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E$ et $(\phi_1, \dots, \phi_k) \in E^*$

$$b\left(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k, \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k\right) = \det\left((\phi_i(x_j))_{i,j \in [\![1,k]\!]}\right).$$

2 Soient $\sigma, \tau : [\![1, k]\!] \to [\![1, n]\!]$ des applications strictement croissantes. Montrer que

$$b\left(e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(k)}, e^*_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\tau(k)}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3 En déduire que b induit un isomorphisme entre $\Lambda^k(E^*)$ et $(\Lambda^k E)^*$.

Correction. **1.** Rappelons que l'application

$$E^k \to \Lambda^k E$$
$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$$

est multilinéaire alternée et satisfait la propriété universelle suivante. Pour tout K-espace vectoriel F et toute application multilinéaire alternée $\phi : E^k \to F$, il existe une et une seule application linéaire $\psi : \Lambda^k E \to F$ telle que

$$\psi(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = \phi(x_1, \dots, x_k)$$

pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$. Le résultat découle de cette propriété universelle en remarquant que le déterminant d'une matrice est multilinéaire alterné par rapport aux lignes et aux colonnes.

2. Il s'agit de montrer que la matrice de $\mathscr{M}_k(K)$

$$A(\sigma, \tau) = \left(e^*_{\tau(i)}(e_{\sigma(j)})\right)_{i,j \in [\![1,k]\!]}$$

est de déterminant nul lorsque $\sigma \neq \tau$. En effet lorsque $\sigma = \tau$ cette matrice est égale à l'identité et est donc de déterminant égal à 1 dans ce cas. Il est utile d'observer que les coefficient de chaque ligne (ou colonne) de la matrice $A(\sigma, \tau)$, sont tous nuls à l'exception éventuellement d'un seul qui peut être égal à 1.

Supposons $\sigma \neq \tau$ et notons i le plus petit entier de $[\![1, k]\!]$ tel que $\sigma(i) \neq \tau(i)$. La matrice $A(\sigma, \tau)$ commence alors par un bloc égal à $I_{i-1} \in \mathscr{M}_k(K)$, les $i-1$ premiers coefficients sur la i-ème ligne (resp. colonne) sont donc tous nuls d'après l'observation précédente. Si $\tau(i) < \sigma(i)$, alors comme σ est strictement croissante, les coefficients restants sur la i-ème ligne de $A(\sigma, \tau)$ sont nuls. Ainsi la i-ème ligne de $A(\sigma, \tau)$ est nulle ce qui impose que son déterminant soit nul. Dans la cas contraire $\sigma(i) < \tau(i)$ et l'on voit de même que toute la i-ème colonne de $A(\sigma, \tau)$ est nulle ce qui impose à nouveau que $A(\sigma, \tau)$ soit de déterminant nul.

3. L'application bilinéaire b induit une application linéaire

$$\ell : \Lambda^k(E^*) \to (\Lambda^k E)^*$$

qui envoit un élément $\phi \in \Lambda^k(E^*)$ sur la forme linéaire $\ell(\phi) = b(-, \phi)$ sur $\Lambda^k E$. La question **2** montre que $\ell(e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(k)}) = (e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(k)})^*$ pour toute application strictement croissante $\sigma : [\![1, k]\!] \to [\![1, n]\!]$. Cela montre que ℓ est surjective et donc que c'est un isomorphisme puisque les deux espaces ont pour dimension $\binom{n}{k}$. □

Exercice 3

Soient K un corps de caractéristique nulle. On se propose de prouver le résultat suivant : *le K-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d à n variables est engendré par les puissances d-èmes des polynômes homogènes de degré 1.*

Soit $d \geqslant 1$ un entier. On note A le sous-ensemble de $\mathbb{N}^n$ formé des éléments $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tels que $d = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

On note $K[X_1,\dots,X_n]$ le K-espace vectoriel des polynômes en n-variables. Il admet pour base les monômes de la forme $X^\alpha := X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$ où $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$. Si $d\geqslant 1$ est un entier, on note $H_{d,n}$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré d c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de $K[X_1,\dots,X_n]$ engendré par les monômes $X^\alpha = X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in A$.

1 Si $i\in[\![1,n]\!]$ on note $\partial_i\in \mathrm{End}_K(K[X_1,\dots,X_n])$ la dérivée partielle par rapport à la variable X_i c'est-à-dire l'unique application K-linéaire telle que

$$\partial_i(X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}) = \begin{cases} \alpha_i X_1^{\alpha_1}\cdots X_{i-1}^{\alpha_{i-1}} X_i^{\alpha_i-1} X_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\cdots X_n^{\alpha_n} & \text{si } \alpha_i\geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Pour $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$, on pose $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$ et $\alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!$.

Justifiez que pour $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in A$, ∂^α est une forme linéaire sur $H_{d,n}$ puis montrer que $(\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha)_{\alpha\in A}$ est la base duale de $(X^\alpha)_{\alpha\in A}$.

2 Soit $P\in H_{1,n}$ un polynôme homogène de degré 1. On note $x_1,\dots,x_n$ les éléments de K tels que $P = x_1X_1+\cdots+x_nX_n$. Montrer que pour $\alpha\in A$

$$\partial^\alpha(P^d) = d!\,x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

3 Soit E le sous-espace vectoriel de $H_{d,n}$ engendré par les puissances d-ème de polynômes de $H_{1,n}$. Justifiez que l'orthogonal au sens de la dualité

$$E^\perp := \{\phi\in(H_{d,n})^* : \phi(Q)=0\ \ \forall Q\in E\}$$

est réduit à zéro.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : si $P\in K[X_1,\dots,X_n]$ est tel que $P(x_1,\dots,x_n)=0$ pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ alors $P=0$.

4 Conclure

Correction. **1.** Suffit de voir que $\partial^\beta(P)$ appartient à K lorsque $P\in H_{d,n}$ et $\beta\in A$ puis que

$$\partial^\beta(X^\alpha) = \begin{cases}\beta! = \alpha! & \text{si } \alpha=\beta \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

pour tout $\alpha,\beta\in A$. Pour la première assertion, on peut supposer $P=X^\alpha$ avec $\alpha\in A$ et l'on se trouve ramené à la seconde. En remarquant que les ∂_i commutent entre elles, on obtient que $\partial^\beta(X^\alpha)=0$ dès qu'il existe $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $\alpha_i<\beta_i$. Dans le cas contraire l'on a a $\alpha_i\geqslant\beta_i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ et comme $d=\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\beta_1+\cdots+\beta_n$, l'on doit avoir $\alpha_i=\beta_i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. Par définition dans ce cas $\partial^\alpha(X^\alpha)=\alpha!$ ce qui conclut.

2. On notera que $d=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$. Remarquons que $\partial_i(P)=x_i$, en particulier $\partial_n(P^d) = d\,x_nP^{d-1}$ ce qui donne

$$\partial_n^{\alpha_n}(P^d) = d(d-1)\cdots(d-\alpha_n+1)x_n^{\alpha_n}P^{d-\alpha_n}$$

puis

$$\partial^\alpha(P^d) = d(d-1)\cdots(d-\alpha_n+1)x_n^{\alpha_n}\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_{n-1}^{\alpha_{n-1}}(P^{d-\alpha_n})$$

On en déduit que $\partial^\alpha(P^d) = d!x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$.

3. Supposons que ϕ appartiennent à $(H_{d,n})^*$. Il existe d'après **1** un élement $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A} \in K^{\oplus A}$ tel que

$$\phi = \sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha \partial^\alpha.$$

D'après **2**, on a $\phi \in E^\perp$ si et seulement si pour tout $(x_1,\ldots,x_n)\in K^n$

$$\sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha d!x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} = \sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha \partial^\alpha((x_1X_1+\cdots+x_nX_n)^d) = \phi((x_1X_1+\cdots+x_nX_n)^d) = 0$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} = 0.$$

Ceci implique que le polynôme $Q = \sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$ est nul et montre que $\lambda_\alpha = 0$ pour tout $\alpha\in A$. On en déduit que $\phi = 0$ et donc que $E^\perp = \{0\}$.

4. D'après **3**, on a $E^\perp = \{0\}$ et donc

$$E = {}^\perp(E^\perp) = {}^\perp(\{0\}) = H_{d,n}$$

ce qui conclut. □