UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre linéaire 3

CC1 : correction

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Existe-t-il un endomorphisme $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ dont le polynôme minimal soit $X+1$ et le polynôme caractéristique X^3+X^2+X+1 ?

Correction. Les polynômes $X+1$ et $X^3+X^2+X+1=(X+1)(X^2+1)$ n'ayant pas les mêmes facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, il ne peut exister d'endomorphisme u dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 dont le premier polynôme soit le polynôme minimal et le second le polynôme caractéristique.

Alternativement, si $X+1$ est le polynôme minimal d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, alors nécessairement $u+\mathrm{Id}_E=0$ ce qui donne $u=-\mathrm{Id}_E$. Le polynôme caractéristique de $u=-\mathrm{Id}_E$ est $(X+1)^3$ et non X^3+X^2+X+1. □

Exercice 2

Soient K un corps et E, F des K-espaces vectoriels

1 Justifiez qu'il existe une et une seule application K-linéaire

$$\alpha : F \otimes E^* \to \mathrm{Hom}_K(E,F)$$

telle que, pour tout $y \in F$ et tout $\phi \in E^*$, $\alpha(y\otimes\phi) \in \mathrm{Hom}_K(E,F)$ soit l'application K-linéaire

$$\begin{aligned} E &\to F \\ x &\mapsto \phi(x)y. \end{aligned}$$

2 On suppose E de dimension finie n. On fixe une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E et on note $\mathscr{B}^*=(e_1^*,\dots,e_n^*)$ sa base duale. On pose pour tout $u \in \mathrm{Hom}_K(E,F)$

$$\beta(u)=\sum_{i=1}^{n} u(e_i)\otimes e_i^*.$$

Montrer que $\beta : \mathrm{Hom}_K(E,F) \to F \otimes_K E^*$ est une application K-linéaire telle que $\beta\circ\alpha=\mathrm{Id}$ et $\alpha\circ\beta=\mathrm{Id}$.

3 En déduire que α est un isomorphisme lorsque E est de dimension finie.

Correction. **1.** Soient $\phi \in E^*$ et $y \in F$. L'application

$$\begin{aligned} \alpha_{y,\phi} : E &\to F \\ x &\mapsto \phi(x)y \end{aligned}$$

étant K-linéaire, on peut considérer l'application de $F \times E^*$ dans $\mathrm{Hom}_K(E,F)$ donnée par

$$\begin{aligned} F \times E^* &\to \mathrm{Hom}_K(E,F) \\ (y,\phi) &\mapsto \alpha_{y,\phi}. \end{aligned}$$

Cette application étant elle-même K-bilinéaire, la propriété universelle du produit tensoriel assure l'existence d'une et d'une seule application K-linéaire $\alpha : F \otimes E^* \to \mathrm{Hom}_K(E,F)$ telle que $\alpha(y \otimes \phi) = \alpha_{y,\phi}$ pour tout $\phi \in E^*$ et tout $y \in F$.

2. Le fait que β soit une application K-linéaire découle des deux observations suivantes.

- Pour tout $x \in E$, l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_x : \mathrm{Hom}_K(E,F) &\to F \\ u &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

  est K-linéaire.
- L'application

$$\begin{aligned} F \times E^* &\to F \otimes E^* \\ (y,\phi) &\mapsto y \otimes \phi \end{aligned}$$

  est K-bilinéaire. Justifions maintenant que $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}$. Pour cela il suffit de montrer l'égalité $\beta \circ \alpha(y \otimes \phi) = y \otimes \phi$ pour tout $\phi \in E^*$ et tout $y \in F$. (En effet, un élément de $F \otimes E^*$ est une somme finie de tenseurs de la forme $y \otimes \phi$). Cela résulte des égalités suivantes

$$\begin{aligned} \beta \circ \alpha(y \otimes \phi) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{y,\phi}(e_i) \otimes e_i^* = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i)y \otimes e_i^* \\ &= \sum_{i=1}^{n} y \otimes \phi(e_i)e_i^* = y \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} \phi(e_i)e_i^* \right) = y \otimes \phi. \end{aligned}$$

  Montrons maintenant que $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}$. Soit $u \in \mathrm{Hom}_K(E,F)$. Par définition

$$\alpha \circ \beta(u) = \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} u(e_i) \otimes e_i^* \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(u(e_i) \otimes e_i^*) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{u(e_i),e_i^*}.$$

  Comme le morphisme $\alpha_{u(e_i),e_i^*} \in \mathrm{Hom}_K(E,F)$ est donné par

$$\alpha_{u(e_i),e_i^*}(x) = e_i^*(x)u(e_i)$$

pour $x \in E$, on voit que

$$\alpha \circ \beta(u)(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{u(e_i),e_i^*}(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) u(e_i) = u\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i\right) = u(x).$$

ce qui conclut.

3. On vient de voir que β est une application K-linéaire et qu'elle est réciproque de α. Le morphisme α est donc un isomorphisme.

□

Exercice 3

Soient K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathrm{End}_K(E)$. On dit que u est simple si et seulement si $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espaces stables par u de E. On se propose de montrer que u est simple si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u est irréductible dans $K[X]$.

1 Montrer que si χ_u est irréductible dans $K[X]$ alors u est simple.

2 Soit $x \in E$ non nul. On pose $F_x := \mathrm{Vec}\langle u^k(x) : k \in \mathbb{N}\rangle$. Montrer que F_x est un sous-espace vectoriel stable par u et que si $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est le plus grand entier tel que $(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$ soit libre, alors $(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$ est une base de F_x.

3 On suppose u simple.

- **a** Soit $x \in E$ non nul. Montrer que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
- **b** En déduire que si $P \in K[X]$ est unitaire de degré $< n$ alors l'endomorphisme $P(u)$ est bijectif.
- **c** Montrer que χ_u est irréductible dans $K[X]$.

Correction. **1.** Supposons χ_u irréductible. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Le polynôme caractéristique $\chi_{u|_F}$ de la restriction de u à F divisant χ_u, l'irréductibilité de χ_u dans $K[X]$ assure que $\chi_{u|_F} = 1$ où $\chi_{u|_F} = \chi_u$. Dans le premier cas $F = \{0\}$ et dans le second cas $F = E$ puisque le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est de degré égal à la dimension de l'espace. Cela montre que u est simple.

2. On peut remarquer que $F_x = \{P(u)(x) : P \in K[X]\}$. La stabilité de F_x par u est alors immédiate. Montrons que la famille $\mathscr{B}_x = (x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$ est une base de F_x. Pour cela, il suffit de montrer (par récurrence) que pour tout entier $k \geqslant r$, le vecteur $u^k(x)$ appartient à $\mathrm{Vec}\langle \mathscr{B}_x \rangle$. Par définition de l'entier r, lorsque l'on adjoint à la famille $\mathscr{B}_x$ le vecteur $u^r(x)$, la famille obtenue est liée. Cela assure que $u^r(x)$ appartient au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vec}\langle \mathscr{B}_x \rangle$. Soit maintenant k un entier $> r$ tel que $u^{k-1}(x)$ soit dans $\mathrm{Vec}\langle \mathscr{B}_x \rangle$. Il existe alors $\lambda_0, \ldots, \lambda_{r-1} \in K$ tels que

$$u^{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i u^i(x).$$

On a donc

$$u^k(x) = \lambda_{r-1} u^r(x) + \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_{i-1} u^i(x).$$

Ce vecteur est bien dans $\mathrm{Vec}\langle \mathscr{B}_x \rangle$ puisque $u^r(x)$ est dans ce sous-espace vectoriel ainsi que tous les autres termes de la somme.

3. On suppose u simple.

a. Soit x un vecteur non nul. Comme u est simple et que F_x est stable par u, on a nécessairement $F_x = E$. En particulier F_x est de dimension n et la question précédente montre que $\mathscr{B}_x = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

b. Soit $P \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré $< n$. On peut donc écrire $P = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i X^i$ avec $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des éléments de K non tous nuls. Si $\mathrm{Ker}\, P(u) \neq \{0\}$, alors il existerait $x \in E$ non nul tel que

$$0 = P(u)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(x)$$

et l'on aurait une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de $\mathscr{B}_x$. On a donc nécessairement $\mathrm{Ker}\, P(u) = \{0\}$. Cela montre que $P(u)$ est injectif et donc bijectif puisque E est de dimension finie.

c. Soient P, Q deux polynômes unitaires tels que $PQ = \chi_u$. Le théorème de Cayley-Hamilton assure que $0 = \chi_u(u) = P(u) \circ Q(u)$. Supposons $\deg P < n = \deg \chi_u$. L'endomorphisme $P(u)$ est alors bijectif d'après la question précédente. Cela impose $Q(u) = 0$. En particulier $Q(u)$ n'est pas bijectif et l'on doit donc avoir $\deg Q = n = \deg \chi_u$ en utilisant à nouveau la question précédente. Ceci montre que χ_u est irréductible dans $K[X]$. □