Université de Rennes

Algèbre linéaire et bilinéaire

Contrôle Continu n° 3 (1h30)

Un barème est mentionné à titre indicatif pour chaque exercice. Il n'a bien sûr aucune valeur contractuelle.

Exercice 1 — Barème indicatif : 5 points (2/1/1/1)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K. On se donne $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme et $F \subseteq E$ un sous-espace u stable de E. On notera $\pi_F \colon E \to E/F$ la projection canonique de E vers le quotient E/F et $u_F \in \mathrm{End}(F)$ l'endomorphisme de F induit par u.

1. Rappeler de quelle façon u induit un endomorphisme de E/F que nous noterons $\overline{u} \in \mathrm{End}(E/F)$. Montrer que les polynômes caractéristiques vérifient la relation :

$$\chi_u = \chi_{u_F}\chi_{\overline{u}}.$$

2. Montrer que si $x \in E$, les sous-espaces cycliques satisfont à l'égalité :

$$\pi_F\left(K[u] \cdot x\right) = K[\overline{u}] \cdot \pi_F(x).$$

La notation $K[u] \cdot x$ désigne le sous-espace cyclique engendré par x :

$$K[u] \cdot x := \{P(u)(x) \mid P \in k[X]\} = \mathrm{Vect}\left(u^j(x), j \geq 0\right) \subset E.$$

3. En déduire que si u est cyclique, alors $\overline{u}$ l'est également.

4. Donner un exemple de situation où u_F et $\overline{u}$ sont cycliques alors que u ne l'est pas.

Exercice 2 — Barème indicatif : 5 points (1/1/1/1/1)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme. On rappelle que u est dit *hermitien* si $u^* = u$ et *anti-hermitien* si $u^* = -u$.

1. On suppose que u est hermitien. Démontrer que $\langle x, y \rangle_u := \langle u(x), y \rangle$ est une forme hermitienne sur E. À quelle condition (portant sur u) cette forme est-elle un produit scalaire hermitien sur E ?

2. On suppose que u est anti-hermitien.

2.1 Justifier qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u et que les valeurs propres de u sont imaginaires pures.

2.2 Démontrer que $|\det(\mathrm{Id}_E + u)| \geq 1$.

Soit $n \geq 1$. On considère $E = \mathbb{C}^n$ que l'on munit du produit scalaire hermitien canonique : $\langle X, Y\rangle = {}^tX\overline{Y}$. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que la matrice $H = \frac{1}{2}(M + M^*)$ est hermitienne définie positive.

3. Démontrer que $H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

4. On considère $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ le produit scalaire hermitien associé à H comme à la question **1**. Soit $B = \frac{1}{2}(M - M^*)$. Démontrer que l'endomorphisme

$$u_M : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ X & \longmapsto & H^{-1}BX \end{cases}$$

est un endomorphisme anti-hermitien de l'espace hermitien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$.

5. Déduire de ce qui précède que $\det H \leq |\det M|$.

Exercice 3 — Barème indicatif : 10 points (4/4/2)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit q et q' deux formes quadratiques **non dégénérées** sur E, dont on note b et b' les formes polaires.

1. On rappelle que le cône isotrope de la forme q est

$$\mathcal{C}(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}.$$

1.1 Montrer que $\mathcal{C}(q)$ est soit un point, soit une réunion de droites vectorielles. Donner des exemples de formes quadratiques q_1 et q_2 telles que $\mathcal{C}(q_1)$ (resp. $\mathcal{C}(q_2)$) est une réunion finie (resp. infinie) de droites.

1.2 Montrer que si q et q' sont proportionnelles (c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ tel que $q' = \lambda q$), alors $\mathcal{C}(q) = \mathcal{C}(q')$.

1.3 Montrer que si $\mathcal{C}(q) = \{0\}$, alors q est de signature $(n, 0)$ ou $(0, n)$.

1.4 En déduire que, en général, l'égalité $\mathcal{C}(q) = \mathcal{C}(q')$ n'implique pas que q et q' sont proportionnelles.

Nous allons montrer que, en dehors de l'obstruction soulevée à la question **1.4**, la réciproque de la question **1.2** est vraie. On suppose donc à partir de cette question que

$$\mathcal{C}(q) = \mathcal{C}(q') \neq \{0\},$$

et notre objectif est de montrer que q et q' sont proportionnelles.

2. Soit y un vecteur isotrope non nul pour q et q'.

2.1 On note H_y (resp. H'_y) le sous-espace orthogonal à $\mathrm{Vect}(y)$ par rapport à la forme bilinéaire b (resp. b'). Pourquoi ces sous-espaces sont-ils des hyperplans de E ?

2.2 Soit $x \in E$. On définit $D_{x,y} = \{x + \alpha y,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Calculer $q(x + \alpha y)$ et en déduire que si $x \in H_y$, alors

$$D_{x,y} \cap \mathcal{C}(q) = \begin{cases} D_{x,y} & \text{si } x \in \mathcal{C}(q) \\ \emptyset & \text{si } x \notin \mathcal{C}(q) \end{cases}$$

2.3 Montrer que si $x \notin H_y$ alors $D_{x,y} \cap \mathcal{C}(q)$ est réduit à un point que l'on précisera.

2.4 Déduire des questions **2.2** et **2.3** que considérer le cardinal de $D_{x,y} \cap \mathcal{C}(q)$ suffit à distinguer les vecteurs x qui appartiennent à H_y de ceux qui n'y appartiennent pas. En déduire que $H_y = H'_y$.

3. On note toujours y un vecteur isotrope pour q et q' comme au début de la question **2**.

3.1 Montrer qu'il existe $\lambda_y \in \mathbb{R}^\times$ tel que $b'(y, \cdot) = \lambda_y b(y, \cdot)$.

3.2 Montrer que pour tout $x \notin H_y$, $q'(x) = \lambda_y q(x)$ (penser à la question **2.3**).

3.3 Montrer que le complémentaire de H_y dans E est une partie dense dans E et conclure.