AL3
L3, semestre 1 (2021-2022)
Université Rennes I

Contrôle continu 2

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.

Question de cours

Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. Énoncer le théorème sur la décomposion de Dunford.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u admet une décomposition de Dunford de partie diagonalisable d. En explicitant l'endomorphisme induit par d sur les sous-espaces caractéristiques de u, démontrer que u et d ont le même polynôme caractéristique.

Problème

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie d. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $Q \in K[X]$. Le but de la première partie de ce problème est de déterminer la liste des invariants de similitude de $Q(u)$ en fonction de ceux de u, sous certaines hypothèses sur Q. Le but de la deuxième partie est d'utiliser ces résultats pour déterminer des conditions nécessaires pour que u soit semblable à u^2.

Partie 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $Q \in K[X]$. On note $\chi_u = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$ le polynôme caractéristique de u et on note $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ l'ensemble des valeurs propres de u (les λ_i sont supposés deux à deux distincts, donc $\mathrm{Sp}(u)$ a r éléments).

1. On suppose que u possède exactement r blocs de Jordan. Expliciter la forme de Jordan de u et démontrer que u est cyclique.

2. En utilisant le théorème de Frobenius, démontrer que si u est cyclique, alors u possède exactement r blocs de Jordan.

3. Dans cette question, on définit pour $k \in \mathbb{N}$, $Q_k = X^k/k! \in \mathbb{C}[X]$. Justifier que la famille $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$, et vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Q_k' = Q_{k-1}$.

4. Soit $n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $d = \dim E$. Pour $\lambda \in K$, on pose $u_\lambda = \lambda id + n$. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Q_k(u_\lambda) = \sum_{i=0}^{k} Q_k^{(i)}(\lambda)\frac{n^i}{i!}.$$

5. En déduire que pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q(u_\lambda) = \sum_{i=0}^{+\infty} Q^{(i)}(\lambda)\frac{n^i}{i!}$.
6. On suppose que $Q'(\lambda) \neq 0$. Démontrer que $Q(u_\lambda)$ est semblable à $u_{Q(\lambda)}$.
7. On suppose dans cette question que u est cyclique et on suppose que Q a les propriétés suivantes :

— si $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(u)$ sont distincts, alors $Q(\lambda) \neq Q(\mu)$;
— pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $m_\lambda = 1$ ou $Q'(\lambda) \neq 0$.

Démontrer que $Q(u)$ est cyclique et expliciter son polynôme caractéristique en fonction de χ_u et Q.
8. On ne suppose plus que u est cyclique, mais on suppose toujours que la restriction de l'application polynomiale Q à $\mathrm{Sp}(u)$ est injective. On suppose de plus que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim(u - \lambda id) = m_\lambda$ ou $Q'(\lambda) \neq 0$. Déterminer les invariants de similitude de $Q(u)$ en fonction du polynôme Q et des invariants de similitude de u.

Partie 2.

Dans cette partie, on cherche à déterminer les éléments $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que u soit semblable à u^2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est semblable à u^2. Soit R un invariant de similitude de u.
9. Justifier que $\ker u = \ker u^2$, et en déduire que la multiplicité de X comme diviseur de R est au plus 1.
10. Démontrer que l'application $\lambda \mapsto \lambda^2$ est une permutation de $\mathrm{Sp}(u)$.
11. Démontrer que si $R = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{\mu_i}$, alors $R = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i^2)^{\mu_i}$.
12. Donner un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que M^2 soit semblable à M, M soit non diagonalisable, et M ait 2 valeurs propres distinctes et non nulles.
13. (Bonus) Les conditions obtenues dans cette partie sont-elles suffisantes ?