Licence de mathématiques

Algèbre linéaire et bilinéaire 2019-2020

AL3 - Contrôle continu 2 - 29 novembre 2019

Durée : 1h

Exercice 1.

Soient E, E' deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E')$. On considère $u \otimes v \in \mathcal{L}(E \otimes E')$.

1. On suppose que u et v sont diagonalisables. Démontrer que $u \otimes v$ est diagonalisable.

> **Solution:** Par hypothèse, on dispose de bases respectives $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(e'_j)_{1\leq j\leq m}$ de E et E' constituées de vecteurs propres respectifs de u et v. Alors, d'une part, la famille $\mathcal{B} = (e_i \otimes e'_j)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ est une base de $E \otimes E'$. D'autre part, pour tout (i,j), si $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et $v(e'_j) = \mu_j e'_j$, alors $(u\otimes v)(e_i \otimes e'_j) = \lambda_i\mu_j e_i \otimes e'_j$, de sorte que la base $\mathcal{B}$ est constitués de vecteurs propres de $u \otimes v$. Donc $u \otimes v$ est diagonalisable.

2. On suppose que u est nilpotent. Démontrer que $u \otimes v$ est nilpotent.

> **Solution:** Une récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}$ montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $(x,y) \in E \otimes E'$, on a $(u \otimes v)(x \otimes y) = u^k(x) \otimes v^k(y)$. En particulier, si $m \in \mathbb{N}$ est tel que $u^k = 0$, on a $(u \otimes v)^m(x \otimes y) = 0$ pour tout $(x,y) \in E \otimes E'$. Comme la famille $\{x \otimes y \mid x \in E, y \in E'\}$ est génératrice de $E \otimes E'$ et $(u \otimes v)^m$ est linéaire, on a $u \otimes v = 0$.

3. Soient $u = d + n$ et $v = d' + n'$ les décompositions de Dunford respectives de u et v. Expliciter la décomposition de Dunford de $u \otimes v$ en fonction de d, n, d' et n'.

> **Solution:** Comme l'application canonique $\mathcal{L}(E)\otimes\mathcal{L}(E') \to \mathcal{L}(E\otimes E')$ est linéaire, on a
>
> $$u \otimes v = d \otimes d' + d \otimes n' + n \otimes d' + n \otimes n'.$$
>
> On vérifie immédiatement que tous les termes du membre de droite de l'égalité précédente commutent entre eux. En particulier, comme $d \otimes n', n \otimes d'$ et $n \otimes n'$ sont nilpotents et commutent entre eux, leur somme $N = d \otimes n' + n \otimes d' + n \otimes n'$ est nilpotente et commute avec $D = d \otimes d'$. D'autre part, d'après la question 1., D est diagonalisable. Ainsi, l'écriture $u \otimes v = D + N$ est la décomposition de Dunford de $u \otimes v$.

Exercice 2.

Soit K un corps de caractéristique 0. Pour $P \in K[X]$, on notera C_P la matrice compagnon associée au polynôme P.

1. Soient $P_1, P_2 \in K[X]$ et $M = \begin{pmatrix} C_{P_1} & 0 \\ 0 & C_{P_2} \end{pmatrix}$.
   (a) On suppose que P_1 et P_2 sont premiers entre eux. Démontrer que M est la matrice d'un endomorphisme cyclique dont on précisera le polynôme caractéristique.

Solution: On vérifie immédiatement que, si $P \in K[X]$, on a

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(C_{P_1}) & 0 \\ 0 & P(C_{P_2}) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si P est annulateur de M, alors P doit annuler C_{P_1} et C_{P_2}. Comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux, $P|P_1P_2$. On en déduit immédiatement que le polynôme minimal de M est P_1P_2, dont le degré est la taille de M. Donc M est la matrice d'un endomorphisme cyclique de polynôme P_1P_2.

(b) On suppose que P_1 et P_2 ne sont pas premiers entre eux. On note P (resp. Q) le pgcd (resp. le ppcm) de P_1 et P_2, et on pose $P_1 = PQ_1$, $P_2 = PQ_2$. On écrit $P = F_1F_2$ avec $pgcd(F_1, Q_2) = pgcd(F_2, Q_1) = pgcd(F_1, F_2) = 1$. Démontrer que $\begin{pmatrix} C_Q & 0 \\ 0 & C_P \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} C_{F_1Q_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{F_2Q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{F_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{F_2} \end{pmatrix}$, puis à $\begin{pmatrix} C_{P_1} & 0 \\ 0 & C_{P_2} \end{pmatrix}$.

Solution: Même si cela n'est pas demandé par l'énoncé, justifions que P admet une telle écriture. Par hypothèse, Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux. Soit F_1 le plus grand diviseur de P dont tous les facteurs irréductibles divisent Q_1, et soit $F_2 = P/F_1$. Alors aucun facteur irréductible de F_1 n'apparaît dans F_2, ni dans Q_2 car Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux. De même, F_2 est premier avec Q_1.

D'après la question précédente, C_P est semblable à $\begin{pmatrix} C_{F_1} & 0 \\ 0 & C_{F_2} \end{pmatrix}$. D'autre part, comme $Q = PQ_1Q_2 = F_1F_2Q_1Q_2$, et que F_1Q_1 et F_2Q_2 sont premiers entre eux, C_Q est semblable à $\begin{pmatrix} C_{F_1Q_1} & 0 \\ 0 & C_{F_2Q_2} \end{pmatrix}$. Par concaténation, on obtient bien la première égalité.

Maintenant, comme F_1 est premier avec F_2Q_2 et F_2 est premier avec F_1Q_1, la question précédente montre que $\begin{pmatrix} C_{F_2} & 0 \\ 0 & C_{F_1Q_1} \end{pmatrix}$ est semblable à $C_{PQ_1} = C_{P_1}$, et que $\begin{pmatrix} C_{F_1} & 0 \\ 0 & C_{F_2Q_2} \end{pmatrix}$ est semblable à $C_{PQ_2} = C_{P_2}$, d'où le résultat.

(c) En déduire les invariants de similitude de M selon que P_1 et P_2 sont premiers entre eux ou non.

Solution: Les matrices $C_{P_1P_2}$ (correspondant au cas de la question 1.(a)) et $\begin{pmatrix} C_A & 0 \\ 0 & C_P \end{pmatrix}$,correspondant au cas de la question 1.(b), avec

$$P = pgcd(P_1, P_2) | ppcm(P_1, P_2) = Q$$

sont sous forme de Frobenius, les invariants de similitude sont donc le singleton (P_1P_2) si P_1 et P_2 sont premiers entre eux, et le couple (Q, P) sinon.

2. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les invariants de similitude de M.

Solution: Cette matrice est sous la forme $\begin{pmatrix} C_{P_1} & 0 \\ 0 & C_{P_2} \end{pmatrix}$, avec $P_1 = X^2 - 1$ et $P_2 = X^3 - 1$. D'après la question précédente, ses invariants de similitude sont $pgcd(P_1, P_2) = X - 1$ et $ppcm(P_1, P_2) = (X^2 - 1)(X^2 + X + 1) = X^4 + X^3 - X - 1$.

3. On se donne $P \in K[X]$ et on considère maintenant la matrice par blocs :

$$C_{P,2} = \begin{pmatrix} C_P & I \\ 0 & C_P \end{pmatrix},$$

où I désigne la matrice identité de taille $d = \deg P$.

(a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$C_{P,2}^k = \begin{pmatrix} C_P^k & kC_P^{k-1} \\ 0 & C_P^k \end{pmatrix}.$$

Solution: Démontrons cette identité par récurrence sur k. Si $k = 0$, le résultat est évident. Supposons-le vrai pour un $k \geq 0$, alors

$$C_{P,2}^{k+1} = \begin{pmatrix} C_P^k & kC_P^{k-1} \\ 0 & C_P^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_P & I \\ 0 & C_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_P^{k+1} & (k+1)C_P^k \\ 0 & C_P^{k+1} \end{pmatrix},$$

d'où le résultat.

(b) En déduire que $Q \in K[X]$ annule $C_{P,2}$ si et seulement si $P|Q$ et $P|Q'$.

Solution: Par linéarité, on a pour tout $Q \in K[X]$,

$$Q(C_{P,2}) = \begin{pmatrix} Q(C_P) & Q'(C_P) \\ 0 & Q(C_P) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $Q \in K[X]$ annule $C_{P,2}$ si et seulement si $Q(C_P) = 0 = Q'(C_P)$.

(c) On suppose que P est irréductible, montrer que le polynôme minimal de $C_{P,2}$ est P^2 et en déduire que $C_{P,2}$ est cyclique.

Solution: Soit Q un polynôme annulateur de $C_{P,2}$, alors P divise Q et Q'. Écrivons $Q = PF$ avec $F \in K[X]$, on a $Q' = P'F + PF' \equiv P'F \pmod{P}$. Comme K est de caractéristique 0 et P est irréductible, il est premier avec

P', et donc P divise F. Ainsi, P^2 divise Q.
Réciproquement, comme $\chi_{C_{P,2}} = P^2$, le polynôme P^2 est annulateur de $C_{P,2}$, c'est donc son polynôme minimal et son polynôme caractéristique, donc $C_{P,2}$ est cyclique de polynôme P^2.

4. On considère toujours $P \in K[X]$ et on définit par récurrence pour $r \geq 1$, $C_{P,1} = C_P$ et

$$C_{P,r} = \left(\begin{array}{c|ccc} C_P & I & 0 \cdots & 0 \\ \hline 0 & & C_{P,r-1} & \end{array}\right).$$

On admet que pour tout $Q \in K[X]$, on a :

$$Q(C_{P,r} = \left(\begin{array}{c|ccc} Q(C_P) & Q'(C_P) & Q''(C_P)/2 \cdots & Q^{(r-1)}(C_P)/(r-1)! \\ \hline 0 & & C_{P,r-1} & \end{array}\right).$$

(a) Démontrer que si Q est un polynôme annulateur de $C_{P,r}$, alors P divise $Q, Q', \ldots, Q^{(r)}$, et en déduire que si P est irréductible, alors P^r divise Q.

Solution: Vu la formule précédente (qui se démontre directement par récurrence sur r), si Q annule $C_{P,r}$, alors $Q, Q', \ldots, Q^{(r-1)}$ annulent C_P, donc P divise $Q, Q', \ldots, Q^{(r-1)}$.
Démontrons par récurrence sur r que si P est irréductible et divise $Q, \ldots, Q^{(r-1)}$, alors P^r divise Q.
Le cas $r = 1$ est évident. Pour l'hérédité, supposons le résultat valide pour $r \geq 1$. On suppose que P irréductible divise $Q, Q', \ldots, Q^{(r)}$. L'hypothèse de récurrence appliquée à Q' montre que P^r divise Q'. Comme P divise Q, on peut écrire $Q = P^k F$ pour un certain entier $k \geq 1$ et $F \in K[X]$ non divisible par P. On a alors $Q' = P^{k-1}(kP'F + F'P)$, et $kP'F + F'P$ est non divisible par P car K est de caractéristique 0 et P est irréductible. En particulier, on a $r \leq k - 1$, et donc $r + 1 \leq k$. Ainsi, P^{r+1} divise Q.

(b) Justifier que si P est irréductible, alors $C_{P,r}$ est cyclique de polynôme minimal P^r.

Solution: Si Q annule $C_{P,r}$, comme P est supposé irréductible, P^r divise Q. Or une récurrence immédiate montre que P^r est le polynôme caractéristique de $C_{P,r}$. Ainsi, P^r est le polynôme minimal de $C_{P,r}$, qui est donc cyclique de polynôme P^r.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$, démontrer qu'il existe une famille de polynômes irréductibles P_i et une famille d'entiers $r_{i,j}$ tels que M soit semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont de la forme $C_{P_i, r_{i,j}}$.

Solution: En considérant la décomposition de Frobenius de M, on se ramène au cas où M est cyclique. En appliquant récursivement le résultat de la question 1., on se ramène au cas où le polynôme caractéristique de M est de plus une puissance d'un polynôme irréductible. On peut donc supposer que $M = C_{P^r}$. La question 4. montre alors que M est semblable à $C_{P,r}$. On peut donc préciser qu'il existe une telle décomposition où les P_i sont les facteurs irréductibles de χ_M, et où $r_{i,j}$ sont les multiplicités de P_i dans les invariants de similitude de M qu'il divise.