UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Licence de Mathématiques**

*Algèbre linéaire et bilinéaire*

Épreuve du 28 novembre 2018 - Durée 1h

L'usage des documents et calculatrices est interdit. L'usage de téléphones portables est interdit. Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées.

**Notations.**

Dans ce sujet, $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes, et pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille $n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Parmi ces matrices, on note $I_n$ la matrice identité, et $J_{0,n}$ le bloc de Jordan nilpotent de taille $n$ (c'est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la surdiagonale qui sont tous égaux à 1). Le bloc de Jordan $J_{\lambda,n}$ est défini par $J_{\lambda,n} = \lambda I_n + J_{0,n}$.

Enfin, on rappelle le résultat suivant du cours : une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

**Problème. Racines carrées de matrices.**

Soit $n \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le but de ce problème est d'étudier l'équation $M^2 = A$.

**I. Cas où $A = I_n$.**

1. On suppose que l'on dispose d'une solution $M$ de l'équation $M^2 = I_n$.
   (a) Montrer que $M$ est diagonalisable.

   **Solution:** Par hypothèse, le polynôme $X^2 - 1$, qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, est annulateur de $M$. Donc $M$ est diagonalisable.

   (b) Déterminer les valeurs propres possibles pour $M$.

   **Solution:** Les valeurs propres de $M$ sont les racines de son polynôme minimal, qui divise $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ par hypothèse. Donc les valeurs propres possibles pour $M$ sont $\pm 1$.

   (c) Montrer que si $N$ est semblable à $M$, alors $N$ est aussi solution de la même équation.

   **Solution:** Soit $N$ semblable à $M$, on dispose de $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $N = PMP^{-1}$. On a alors bien $N^2 = PM^2P^{-1} = I_n$.

2. (a) Décrire les classes de similitudes de solutions de l'équation $M^2 = I_n$ en termes de valeurs propres de $n$ (on pourra donner un représentant diagonal dans chaque classe de similitude).

   **Solution:** D'après la question précédente, toute solution de cette équation est diagonalisable, de valeurs propres $\pm 1$. La réciproque est immédiate, car une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\pm 1$ a pour carré $I_n$. Les solutions sont donc les classes de similitude des matrices de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, avec $p + q = n$.

(b) Montrer que le nombre de classes de similitude de solutions de cette équation est $n+1$.

**Solution:** D'après ce qui précède, le nombre de classes de solutions est le cardinal de $\{(p,q) \mid 0 \leq p,q \leq n, p+q=n\}$. Cet ensemble est aussi $\{(p,n-p) \mid 0 \leq p \leq n\}$, qui possède bien $n+1$ éléments.

**II. Cas où $A$ est inversible.**

1. Dans cette question, on fixe $\mu \neq 0$ et on considère le bloc de Jordan $J_{\mu,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Justifier le fait que $J_{\mu,n} + \mu I_n$ est inversible.

   **Solution:** On a $J_{\mu,n} + \mu I_n = J_{2\mu,n}$ dont le déterminant est $(2\mu)^n \neq 0$ puisque $\mu \neq 0$. Cette matrice est donc inversible.

   (b) Démontrer que $J_{\mu,n}^2 - \mu^2 I_n$ est nilpotente, d'indice de nilpotence $n$.

   **Solution:** On a $J_{\mu,n}^2 - \mu^2 I_n = (J_{\mu,n} + \mu I_n)(J_{\mu,n} - \mu I_n) = J_{2\mu,n} J_{0,n}$. Ces deux facteurs commutent, donc $(J_{\mu,n}^2 - \mu^2 I_n)^n = J_{2\mu,n}^n J_{0,n}^n = 0$, et $(J_{\mu,n}^2 - \mu^2 I_n)^{n-1} = J_{2\mu,n}^{n-1} J_{0,n}^{n-1} \neq 0$ (car $J_{0,n}^{n-1} \neq 0$ et $J_{2\mu,n}$ est inversible). C'est bien le résultat attendu.

   (c) En déduire que $J_{\mu,n}^2$ est semblable à $J_{\mu^2,n}$.

   **Solution:** Le théorème de réduction de Jordan appliqué à $J_{\mu,n}^2$ montre que sa forme de Jordan possède un seul bloc de Jordan de taille $n$ (et de valeur propre $\mu^2$). Elle est donc semblable à $J_{\mu^2,n}$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul et soit $\mu \in \mathbb{C}$ une racine carrée de $\lambda$.
   (a) Démontrer que l'équation $M^2 = J_{\lambda,n}$ admet une solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   **Solution:** D'après ce qui précède, $J_{\lambda,n}$ est semblable à $J_{\mu,n}^2$ : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $J_{\lambda,n} = P^{-1} J_{\mu,n}^2 P = (P^{-1} J_{\mu,n} P)^2$.

   (b) En considérant la décomposition de Jordan d'une solution de cette équation, montrer qu'il n'y a que 2 classes de similitude possibles pour une telle solution.

   **Solution:** Soit $M$ une solution de cette équation. Les valeurs propres de $M$ sont $\pm\mu$, ses blocs de Jordan sont donc $J_{\mu,n_1}, \ldots, J_{\mu,n_p}, J_{-\mu,n'_1}, \ldots, J_{-\mu,n'_q}$. D'après les questions précédentes, $M^2$ est alors semblable à la matrice dont les blocs de Jordan sont $J_{\lambda,n_1}, \ldots, J_{\lambda,n_p}, J_{\lambda,n'_1}, \ldots, J_{\lambda,n'_q}$. Par unicité de la décomposition de Jordan, tous les $n_i$ et $n'_i$ sont nuls sauf un, et $M$ est donc semblable à $J_{\mu,n}$ ou à $J_{-\mu,n}$.

3. On suppose maintenant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible. Démontrer que l'équation $M^2 = A$ possède une solution.

   **Solution:** Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, $A$ possède une décomposition de Jordan. Pour chaque bloc de Jordan $J_i$ de $A$, on dispose d'une solution à l'équation $M_i^2 = J_i$ puisque $J_i$ est inversible (car $A$ l'est). Alors la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont $M_1, \ldots, M_r$ est une racine carrée de la forme de Jordan de $A$. En conjuguant par la matrice de passage convenable, on obtient une racine carrée de $A$.

**III. Cas où $A$ est nilpotente.**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, on suppose que $M$ vérifie $M^2 = A$.
   (a) Justifier que $M$ est nilpotente

   **Solution:** On a $A^n = 0$, donc $M^{2n} = 0$, et donc $M$ est nilpotente.

   (b) Soit $a$ l'indice de nilpotence de $A$ et $m$ celui de $M$. Montrer que $2a - 1 \leq m \leq 2a$.

   **Solution:** Comme $A^a = 0$, on a $M^{2a} = 0$, d'où $2a \geq m$. D'autre part, on a $M^{2a-2} = A^{a-1} \neq 0$, donc $2a - 2 < m$.

   (c) En déduire que si $A$ est nilpotente d'indice $a$ avec $2a > n + 1$, alors l'équation $M^2 = A$ n'a pas de solution.

   **Solution:** Sous cette hypothèse, si $A$ possédait une racine carrée $M$, l'indice de nilpotence $m$ de $M$ vérifierait $m + 2 > 2a \geq n + 2$, d'où $m > n$, ce qui est exclu par le théorème de Cayley-Hamilton.

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $J_{0,n}$. En considérant la base $(e_1, e_3, \dots, e_2, e_4, \dots)$ de $E$, déterminer les invariants de similitude de $u$ (on pourra distinguer selon la parité de $n$).

   **Solution:** Il est immédiat que $u$ possède pour seul invariant de similitude $X^n$. Une question plus utile aurait été de donner les invariants de similitude de $u^2$ ! Faisons-le ici.
   On a $u(e_i) = e_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq n$, et $u(e_1) = 0$. Supposons $n = 2p$ pair et considérons maintenant la base $(e_1, \dots, e_{2p-1}, e_2, e_4, \dots, e_{2p})$. Alors la matrice de $u^2$ dans cette base est diagonale par blocs, avec pour bloc $J_{0,p}$ répété 2 fois. C'est donc la décomposition de Jordan de $u^2$ et ses invariants de similitude sont $(X^p, X^p)$. Dans le cas où $n = 2p + 1$ est impair, un raisonnement analogue donne pour invariants de similitude $(X^p, X^{p+1})$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On note $(X^{n_1}, \dots, X^{n_r})$ (avec $n_1 \leq \dots \leq n_r$) les invariants de similitude de $A$.
   (a) On suppose que $M^2 = A$. Exprimer les $n_i$ en fonction des invariants de similitude de $M$.

   **Solution:** Sous ces hypothèses, $M$ est nilpotente ; notons $(X^{m_1}, \dots, X^{m_s})$ (avec $m_1 \leq \dots \leq m_s$) ses invariants de similitude. D'après ce qui précède, un bloc associé à $X^m$ contribue pour 2 blocs dans la décomposition de $M^2$, et leurs tailles sont $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ et $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$. En particulier, $r$ est pair et les $n_i$ sont les $\left\lfloor \frac{m_i}{2} \right\rfloor$ et $\left\lceil \frac{m_i}{2} \right\rceil$ comptés avec multiplicités.

   (b) On suppose que $r = 2k$ est pair et que pour tout $1 \leq i \leq k$, $n_{2i} - n_{2i-1} \in \{0, 1\}$. Montrer que l'équation $M^2 = A$ possède une solution.

   **Solution:** Dans la décomposition de Frobenius de $A$, rassemblons les blocs par paires de blocs consécutifs : d'après l'hypothèse, dans une telle paire, les tailles des blocs diffèrent d'au plus 1. Si ces blocs sont de tailles $p$ et $p + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$, alors la matrice constituée de ces deux blocs est semblable au carré de $J_{0,2p+\varepsilon}$ d'après la question précédente. Ainsi, $A$ est semblable à un carré, c'est donc un carré.