UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Licence de Mathématiques

Algèbre linéaire et bilinéaire

Épreuve du 28 novembre 2018 - Durée 1h

L'usage des documents et calculatrices est interdit. L'usage de téléphones portables est interdit. Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées.

Notations.

Dans ce sujet, $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes, et pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Parmi ces matrices, on note I_n la matrice identité, et $J_{0,n}$ le bloc de Jordan nilpotent de taille n (c'est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la surdiagonale qui sont tous égaux à 1). Le bloc de Jordan $J_{\lambda,n}$ est défini par $J_{\lambda,n} = \lambda I_n + J_{0,n}$.

Enfin, on rappelle le résultat suivant du cours : une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Problème. Racines carrées de matrices.

Soit $n \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le but de ce problème est d'étudier l'équation $M^2 = A$.

I. Cas où $A = I_n$.

1. On suppose que l'on dispose d'une solution M de l'équation $M^2 = I_n$.
   (a) Montrer que M est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres possibles pour M.
   (c) Montrer que si N est semblable à M, alors N est aussi solution de la même équation.
2. (a) Décrire les classes de similitudes de solutions de l'équation $M^2 = I_n$ en termes de valeurs propres de n (on pourra donner un représentant diagonal dans chaque classe de similitude).
   (b) Montrer que le nombre de classes de similitude de solutions de cette équation est $n + 1$.

II. Cas où A est inversible.

1. Dans cette question, on fixe $\mu \neq 0$ et on considère le bloc de Jordan $J_{\mu,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Justifier le fait que $J_{\mu,n} + \mu I_n$ est inversible.
   (b) Démontrer que $J_{\mu,n}^2 - \mu^2 I_n$ est nilpotente, d'indice de nilpotence n.
   (c) En déduire que $J_{\mu,n}^2$ est semblable à $J_{\mu^2,n}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul et soit $\mu \in \mathbb{C}$ une racine carrée de λ.
   (a) Démontrer que l'équation $M^2 = J_{\lambda,n}$ admet une solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) En considérant la décomposition de Jordan d'une solution de cette équation, montrer qu'il n'y a que 2 classes de similitude possibles pour une telle solution.
3. On suppose maintenant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible. Démontrer que l'équation $M^2 = A$ possède une solution.

III. Cas où A est nilpotente.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, on suppose que M vérifie $M^2 = A$.
   (a) Justifier que M est nilpotente
   (b) Soit a l'indice de nilpotence de A et m celui de M. Montrer que $2a - 1 \leq m \leq 2a$.
   (c) En déduire que si A est nilpotente d'indice a avec $2a > n + 1$, alors l'équation $M^2 = A$ n'a pas de solution.
2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $J_{0,n}$. En considérant la base $(e_1, e_3, \dots, e_2, e_4, \dots)$ de E, déterminer les invariants de similitude de u (on pourra distinguer selon la parité de n).
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On note $(X^{n_1}, \dots, X^{n_r})$ (avec $n_1 \leq \cdots \leq n_r$) les invariants de similitude de A.
   (a) On suppose que $M^2 = A$. Exprimer les n_i en fonction des invariants de similitude de M.
   (b) On suppose que $r = 2k$ est pair et que pour tout $1 \leq i \leq k$, $n_{2i} - n_{2i-1} \in \{0, 1\}$. Montrer que l'équation $M^2 = A$ possède une solution.