Licence de Mathématiques
Algèbre linéaire et bilinéaire
Contrôle continu 2 - 24 novembre 2017
Durée : 1h

L'usage des documents et calculatrices est interdit. Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Donner la liste des classes de similitude d'endomorphismes de E dont le polynôme caractéristique est $X^3(X-1)^2$. On pourra décrire ces classes en fonction de leurs invariants de similitude.

Les invariants de similitude d'une classe de similitude ayant pour polynôme caractéristique $P = X^3(X-1)^2$ sont les listes de polynômes unitaires de la forme $(P_1, \dots, P_r)$ avec $P_1 | \cdots | P_r$ et $P_1 \cdots P_r = P$.
Ces classes sont donc celles ayant pour invariants de similitude :

$$(X^3(X-1)^2), (X, X^2(X-1)^2), (X, X, X(X-1)^2),$$
$$(X-1, X^3(X-1), (X(X-1), X^2(X-1)), (X, X(X-1), X(X-1)).$$

Notons au passage que la théorie des invariants de similitude implique aussi que pour chacune de ces listes de polynômes, il existe bien une classe de similitude dont ce sont les invariants (c'est la classe de la matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux sont les matrices compagnons correspondant à ces polynômes).

2. Parmi ces classes de similitude, y en a-t-il qui ne sont pas déterminées par la donnée supplémentaire de leur polynôme minimal ? Lesquelles ?

Le polynôme minimal est le plus grand invariant de similitude (pour la relation de divisibilité). Dans la liste précédente, tous ces éléments sont deux à deux distincts. Dans l'ordre, ce sont :

$$X^3(X-1)^2, X^2(X-1)^2, X(X-1)^2, X^3(X-1), X^2(X-1), X(X-1).$$

Ainsi, chaque classe de similitude est entièrement caractérisée par la donnée de son polynôme minimal.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On note V l'espace vectoriel $\mathrm{End}(E)$ des endomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de E.
Soit $u \in V$. Le but de cet exercice est d'étudier l'application :

$$\varphi_u \ : \ \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ v & \mapsto & uv - vu \end{array} \right.$$

1. Justifier la linéarité de φ_u.

L'application φ_u est linéaire car les applications $v \mapsto uv$, $v \mapsto vu$ le sont et qu'une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre non nulle de φ_u, et soit $v \in V$ un vecteur propre associé. Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \varphi_u(v^k) = k\lambda v^k.$$

Démontrons cette relation par récurrence sur k.
Si $k = 0$, $v^k = id$ qui commute avec u d'où la formule $\varphi_u(v^0) = 0$.
Supposons la formule vraie pour un $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$uv^{k+1} = uv^k v = (v^k u + k\lambda v^k)v$$

par hypothèse de récurrence. Ainsi, comme $uv = vu + \lambda v$, on a :

$$uv^{k+1} = v^k(vu + \lambda v) + k\lambda v^{k+1} = v^{k+1}u + (k+1)\lambda v^{k+1}.$$

Par conséquent, $\varphi_u(v^{k+1}) = (k+1)\lambda v^k$, et l'hypothèse de récurrence est héréditaire. La formule est donc démontrée pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que si v est vecteur propre associé à une valeur propre non nulle de φ_u, alors v est nilpotent.

Si $v^k \neq 0$, alors v^k est vecteur propre de φ_u, associé à la valeur propre λk. Si $\lambda \neq 0$, alors l'ensemble $\{\lambda k,\ k \in \mathbb{N}\}$ forme une famille infinie. Comme φ_u n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $v^k = 0$, donc v est nilpotent.

4. Démontrer que 0 est valeur propre de φ_u, de multiplicité au moins 2 si $n \geqslant 2$.

Si u est une homothétie, alors $\varphi_u = 0$ donc $\ker \varphi_u = V$ qui est de dimension $\geqslant 2$ par hypothèse. Si u n'est pas une homothétie, alors $\varphi_u(id) = 0$ et $\varphi_u(u) = 0$, et $\mathrm{Vect}(id, u)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\ker \varphi_u$.

5. Dans cette question, on suppose que u est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe une base de E de la forme $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$. On note $E_0(\varphi_u) \subset V$ le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 de u.

(a) Soit $y \in E$, démontrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $y = P(u)(x)$.

Soit $y \in E$. Par hypothèse, y s'écrit $y = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x)$, pour certains $a_i \in \mathbb{C}$. Soit alors $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$, on a donc $P(u)(x) = y$.

(b) Soit $v \in E_0(\varphi_u)$, démontrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $v = P(u)$.

Notons que $E_0(\varphi_u)$ est l'ensemble des éléments de V qui commutent avec u. Soit donc v qui commute avec u, on fixe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $v(x) = P(u)(x)$. On a alors $v(u(x)) = u(v(x)) = P(u)(u(x))$. Une récurrence immédiate montre que :

$$\forall 1 \leq i \leq n-1,\ v(u^i(x)) = P(u)(u^i(x)).$$

Comme les endomorphismes v et $P(u)$ coïncident sur la base $(x, \ldots, u^{n-1}(x))$, ils sont égaux. On a donc bien $v \in \mathbb{C}[u]$.

(c) En déduire que $E_0(\varphi_u) = \mathbb{C}[u]$. Quelle est la dimension de $E_0(\varphi_u)$?

La question précédente montre que $E_0(\varphi_u) \subset \mathbb{C}[u]$. L'inclusion réciproque est immédiate, on a donc $E_0(\varphi_u) = \mathbb{C}[u]$.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$ donc, par division euclidienne, $\mathbb{C}[u] = \mathrm{Vect}(id, u, \ldots, u^{n-1})$. De plus, cette famille est libre sans quoi la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ ne le serait pas. Donc $\dim \mathbb{C}[u] = n$.

6. On suppose maintenant que u est diagonalisable et de valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u, avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Pour $1 \leq i, j \leq n$, on définit l'endomorphisme $v_{ij} \in V$ par $v_{ij}(e_k) = \delta_{ik} e_j$. On ne demande de pas de justifier que les v_{ij} forment une base de V.

(a) Calculer $\varphi_u(v_{ij})$.

Soit $1 \leq k \leq n$. Par définition, on a $uv_{ij}(e_k) = u(\delta_{ik}e_j) = \delta_{ik}\lambda_j e_j$, et $v_{ij}u(e_k) = v_{ij}\lambda_k e_k = \lambda_k \delta_{ik} e_j$. Ainsi, on a $\varphi_u(v_{ij})(e_k) = (\lambda_j - \lambda_i)\delta_{ik}e_j$, donc $\varphi_u(v_{ij}) = (\lambda_j - \lambda_i)v_{ij}$.

(b) En déduire les valeurs propres de φ_u, puis démontrer que φ_u est diagonalisable.
Le calcul précédent montre que v_{ij} est vecteur propre, associé à la valeur propre $\lambda_j - \lambda_i$. La famille (v_{ij}) forme une base de V constituée de vecteurs propres de φ_u donc φ_u est diagonalisable et ses valeurs propres sont les $\{\lambda_j - \lambda_i,\ 1 \leq i, j \leq n\}$.

(c) Exprimer la dimension de $E_0(\varphi_u)$ en fonction des multiplicités des valeurs propres de u. À quelle condition u est-il cyclique ?

On a $\varphi_u(v_{ij}) = 0$ si et seulement si $\lambda_i = \lambda_j$. Ainsi, $\dim \ker \varphi_u = \#\{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \mid |\lambda_i = \lambda_j\}$. Si on note m_λ la multiplicité de la valeur propre λ de u, on a donc :

$$\dim E_0(\varphi_u) = \sum_\lambda m_\lambda^2.$$

Or, on sait que si u est cyclique, alors $\dim E_0(\varphi_u) = n$. Comme $\sum_\lambda m_\lambda = n$ (c'est le degré du polynôme caractéristique de u), on a alors $0 = \sum_\lambda m_\lambda(m_\lambda - 1)$, donc tous les m_λ sont égaux à 1, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de u sont simples. Réciproquement, si u est diagonalisable à valeurs propres simples, alors son polynôme caractéristique et son polynôme minimal sont égaux, donc u est cyclique.

7. Soit $v \in V$. Démontrer par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi_u^k(v) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} u^{k-i} v u^i.$$

Si $k = 0$, on a $\varphi_u^k(v) = v = \sum_{i=0}^{0}(-1)^0\binom{0}{i}u^{-i}vu^i$, la formule est donc valable pour $k = 0$. Supposons qu'elle soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\varphi_u^{k+1}(v) = u\varphi_u^k(v) - \varphi_u^k(v)u = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}u^{k+1-i}vu^i - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}u^{k-i}vu^{i+1}.$$

On extrait de la première somme du membre de droite le terme correspondant à $i = 0$, et de la deuxième le terme $i = k$, puis on réindexe la deuxième somme en effectuant le changement d'indice $j = i + 1$:

$$\varphi_u^{k+1}(v) = u^{k+1}v + (-1)^{k+1}vu^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}\right]u^{k+1-i}vu^i.$$

En appliquant la formule du triangle de Pascal, on en déduit que

$$\varphi_u^{k+1}(v) = u^{k+1}v + (-1)^{k+1}vu^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k+1}{i}u^{k+1-i}vu^i,$$

qui est bien la formule au rang $k+1$. La formule est donc démontrée pour tout $k \in \mathbb{N}$.

8. Déduire de la question précédente que si u est nilpotent, alors φ_u est nilpotent.

Supposons u nilpotent, alors $u^n = 0$. Soit $v \in V$. On a alors, d'après la formule précédente :

$$\varphi_u^{2n}(v) = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\binom{2n}{i}u^{2n-i}vu^i.$$

Or, pour $0 \leq i \leq 2n$, on a $i < n \Rightarrow 2n - i \geqslant n$, et donc pour tout $0 \leq i \leq 2n$, $u^{2n-i} v u^i = 0$. Cela montre que $\varphi_u^{2n} = 0$, donc φ_u est nilpotent.

9. On écrit $u = d + n$ la décomposition de Dunford de u, avec d diagonalisable, n nilpotent, et $dn = nd$.

(a) Vérifier que $\varphi_u = \varphi_d + \varphi_n$.

Soit $v \in V$, on a

$$\varphi_u(v) = uv - vu = dv - vd + (nv - vn) = \varphi_d(v) + \varphi_n(v),$$

d'où l'égalité demandée.

(b) Montrer que $\varphi_d \circ \varphi_n = \varphi_n \circ \varphi_d$.

Soit $v \in V$. D'une part,

$$\varphi_d \circ \varphi_n(v) = d(nv - vn) - (nv - vn)d = dnv + vnd - dvn - nvd.$$

D'autre part,

$$\varphi_n \circ \varphi_d(v) = n(dv - vd) - (dv - vd)n = ndv - nvd - dvn + vdn = dnv + vdn - nvd - dvn$$

car d et n commutent. On a donc bien égalité de ces deux quantités.

(c) En déduire la décomposition de Dunford de φ_u.

D'après ce qui précède, si $u = d+n$ est la décomposition de Dunford de u, on a φ_d diagonalisable car d l'est, φ_n nilpotent car n l'est, et $\varphi_d \varphi_n = \varphi_n \varphi_d$. Donc l'écriture $\varphi_u = \varphi_d + \varphi_n$ est la décomposition de Dunford de φ_u.