UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Licence de Mathématiques 2017-2018

Algèbre linéaire 3

Contrôle continu 2 - 29 novembre 2017

Durée : 1h

L'usage des documents et calculatrices est interdit. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Donner la liste des classes de similitude d'endomorphismes de E dont le polynôme caractéristique est $X^3(X-1)^2$. On pourra décrire ces classes en fonction de leurs invariants de similitude.

2. Parmi ces classes de similitude, y en a-t-il qui ne sont pas déterminées par la donnée supplémentaire de leur polynôme minimal ? Lesquelles ?

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On note V l'espace vectoriel $\mathrm{End}(E)$ des endomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de E.

Soit $u \in V$. Le but de cet exercice est d'étudier l'application :

$$\varphi_u \ : \ \left| \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ v & \mapsto & uv - vu \end{array} \right.$$

1. Justifier la linéarité de φ_u.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre non nulle de φ_u, et soit $v \in V$ un vecteur propre associé. Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi_u(v^k) = k\lambda v^k.$$

3. En déduire que si v est vecteur propre associé à une valeur propre non nulle de φ_u, alors v est nilpotent.

4. Démontrer que 0 est valeur propre de φ_u, de multiplicité au moins 2 si $n \geqslant 2$.

5. Dans cette question, on suppose que u est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe une base de E de la forme $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$. On note $E_0(\varphi_u) \subset V$ le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 de φ_u.

(a) Soit $y \in E$, démontrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $y = P(u)(x)$.

(b) Soit $v \in E_0(\varphi_u)$, démontrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $v = P(u)$.

(c) En déduire que $E_0(\varphi_u) = \mathbb{C}[u]$. Quelle est la dimension de $E_0(\varphi_u)$?

6. On suppose maintenant que u est diagonalisable et de valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u, avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Pour $1 \leq i, j \leq n$, on définit l'endomorphisme $v_{ij} \in V$ par $v_{ij}(e_k) = \delta_{ik} e_j$. On ne demande de pas de justifier que les v_{ij} forment une base de V.

(a) Calculer $\varphi_u(v_{ij})$.

(b) En déduire les valeurs propres de φ_u, puis démontrer que φ_u est diagonalisable.

(c) Exprimer la dimension de $E_0(\varphi_u)$ en fonction des multiplicités des valeurs propres de u. À quelle condition u est-il cyclique ?

7. Soit $v \in V$. Démontrer par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi_u^k(v) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} u^{k-i} v u^i.$$

8. Déduire de la question précédente que si u est nilpotent, alors φ_u est nilpotent.

9. On écrit $u = d + n$ la décomposition de Dunford de u, avec d diagonalisable, n nilpotent, et $dn = nd$.

(a) Vérifier que $\varphi_u = \varphi_d + \varphi_n$.

(b) Montrer que $\varphi_d \circ \varphi_n = \varphi_n \circ \varphi_d$.

(c) En déduire la décomposition de Dunford de φ_u.