Licence 3 Mathématiques
Université Rennes 1
ENS Rennes

AL3 - Algèbre linéaire et bilinéaire
Contrôle continu 1.
19 octobre 2022 - Durée : 1h

Les documents et calculatrices son interdits. Veuillez garder vos téléphones éteints et rangés pendant toute la durée de l'épreuve. Toutes les réponses doivent être dûment justifiées.

Question de cours
Soit E un K-espace vectoriel et soit $p \geq 0$ un entier.
Énoncer la propriété universelle de $\bigwedge^p E$, la p-ème puissance extérieure de E.

Réponse.
On note $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ l'application p-linéaire alternée canonique $E^p \to \bigwedge^p E$.
La propriété universelle de $\bigwedge^p E$ s'énonce alors comme suit :
Pour tout K-espace vectoriel E' et pour toute application p-linéaire alternée $f : E^p \to E'$, il existe une unique application linéaire $\tilde{f} : \bigwedge^p E \to E'$ telle que pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, $\tilde{f}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = f(x_1, \ldots, x_p)$.

Exercice 1.
Soit E un K-espace vectoriel et E_1, E_2 des sous-espaces vectoriels de E.

1. Rappeler la définition de la somme $E_1 + E_2$ et justifier que E_2 est un sous-espace vectoriel de $E_1 + E_2$.

   Réponse.
   Considérons l'application linéaire $\Sigma : E_1 \times E_2 \to E$ définie par $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$. Alors par définition, $E_1 + E_2$ est l'image de cette application, et $E_2 = \Sigma(\{0\} \times E_2)$ en est un sous-espace vectoriel.

   On considère l'application composée de l'injection canonique $\iota : E_1 \to E_1 + E_2$ et de la projection canonique $\pi : E_1 + E_2 \to (E_1 + E_2)/E_2$.

2. Démontrer que $\pi \circ \iota$ est surjective.

   Réponse.
   Soit $y \in (E_1 + E_2)/E_2$. On dispose de $x \in E_1 + E_2$ tel que $y = \pi(x)$. Par définition de $E_1 + E_2$, on dispose de $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. On a alors $y = \pi(x_1) = \pi \circ \iota(x_1)$. Cela montre que $\pi \circ \iota$ est surjective.

3. Déterminer $\ker(\pi \circ \iota)$.

   Réponse.
   Par définition du noyau et de π et ι, on a :
   $$\ker(\pi \circ \iota) = \{x \in E_1 \mid \pi(x) = 0\} = \{x \in E_1 \mid x \in E_2\} = E_1 \cap E_2.$$

4. En déduire que $\pi \circ \iota$ induit un isomorphisme $E_1/(E_1 \cap E_2) \to (E_1 + E_2)/E_2$.

Réponse.
Par propriété universelle du quotient, $\pi \circ \iota$ induit une application linéaire $E_1/(E_1 \cap E_2) \to (E_1 + E_2)/E_2$, et d'après le théorème d'isomorphisme, cette application est un isomorphisme (car $\pi \circ \iota$ est surjective de noyau $E_1 \cap E_2$).

5. Démontrer que $\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$.

Réponse.
En général, si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, on a $\dim(E/F) + \dim F = \dim E$. Remarquons que si l'un des espaces $E_1/(E_1 \cap E_2)$ ou $(E_1 + E_2)/E_2$ est de dimension infinie, alors E_1 est de dimension infinie, d'où l'égalité voulue.
Sinon, $\dim E_1/(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1 + E_2)/E_2$ est finie. On obtient $\dim(E_1 + E_2) - \dim E_2 = \dim(E_1 + E_2)/E_2$ et $\dim E_1 - \dim(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1/(E_1 \cap E_2))$. Cela montre l'égalité attendue.

Exercice 2.
Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $\varphi \in E^*$ et $\psi \in F^*$. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $M_{\varphi,\psi} : E \otimes F \to K$ telle que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $M_{\varphi,\psi}(x \otimes y) = \varphi(x)\psi(y)$.

Réponse.
On considère l'application $\hat{M}_{\varphi,\psi} : E \times F \to K$ définie par $\hat{M}_{\varphi,\psi}(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Par linéarité de φ et ψ, et bilinéarité de la multiplication dans K, cette application est bilinéaire. Par propriété universelle de $E \otimes F$, il existe une unique application $M_{\varphi,\psi} \in \mathcal{L}(E \otimes F, K)$ telle que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $M_{\varphi,\psi}(x \otimes y) = \hat{M}_{\varphi,\psi}(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Cela montre bien l'existence et l'unicité de $M_{\varphi,\psi}$ comme attendu.

2. Justifier que l'application :

$$M \ : \ \left| \begin{array}{ccc} E^* \times F^* & \to & (E \otimes F)^* \\ (\varphi, \psi) & \mapsto & M_{\varphi,\psi} \end{array} \right.$$

est bilinéaire.

Réponse.
Montrons la linéarité par rapport à la première variable. Soient $\varphi, \varphi' \in E$ et $\lambda \in K$. Soit $(x, y) \in E \times F$, alors

$$M_{\lambda\varphi+\varphi',\psi}(x \otimes y) = (\lambda\varphi+\varphi')(x)\psi(y) = \lambda\varphi(x)\psi(y)+\varphi'(x)\psi(y) = \lambda M_{\varphi,\psi}(x \otimes y)+M_{\varphi',\psi}(x \otimes y).$$

Ainsi, l'application linéaire $M_{\lambda\varphi+\varphi',\psi} - \lambda M_{\varphi,\psi} - M_{\varphi',\psi}$ est l'unique application linéaire $E \otimes F \to K$ telle que pour tout $(x, y) \in E \otimes F$, $x \otimes y \mapsto 0$: elle est donc nulle. On a bien $M_{\lambda\varphi+\varphi',\psi} = \lambda M_{\varphi,\psi} + M_{\varphi',\psi}$.
On démontre de même la linéarité par rapport à la deuxième variable.

3. En déduire qu'il existe une unique application linéaire $m : E^* \otimes F^* \to (E \otimes F)^*$ telle que pour tout $(\varphi, \psi) \in E^* \times F^*$, et pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$m(\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Réponse.
L'application $M : E^* \times F^* \to (E \otimes F)^*$ définie à la question précédente est bilinéaire. La propriété universelle de $E^* \otimes F^*$ assure alors l'existence et l'unicité d'une application linéaire m comme attendu.

4. Démontrer que m est un isomorphisme.

Réponse.
Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$ des bases respectives de E^* et F^*, et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ et $(f_1^*, \dots, f_m^*)$ les bases duales correspondantes. Soit $g \in \ker M$, on peut écrire $g = \sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i^* \otimes f_j^*$. Par hypothèse, pour tout (k, l), on a $\lambda_{kl} = m(g)(e_k \otimes f_l) = 0$. Cela montre que m est injective. Par égalité des dimensions, m est un isomorphisme.

Soient E_1, E_2, F_1, F_2 des K-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et $v \in \mathcal{L}(F_1, F_2)$.

5. Justifier l'existence d'une unique application linéaire $u \otimes v : E_1 \otimes F_1 \to E_2 \otimes F_2$ telle que pour tout $(x_1, y_1) \in E_1 \otimes F_1$, $(u \otimes v)(x_1 \otimes y_1) = u(x_1) \otimes v(y_1)$.

Réponse.
L'application $E_1 \times F_1 \to E_2 \otimes F_2$ définie par $(x_1, y_1) \mapsto u(x_1) \otimes v(y_1)$ est bilinéaire par linéarité de u et v et bilinéarité du produit tensoriel. La propriété universelle de $E_1 \otimes F_1$ montre alors le résultat attendu.

On note m_1 (resp. m_2) l'isomorphisme $E_1^* \otimes F_1^* \to (E_1 \otimes F_1)^*$ (resp. $E_2^* \otimes F_2^* \to (E_2 \otimes F_2)^*$) analogue de celui construit à la question 3.

6. Démontrer que $m_1 \circ ({}^t u \otimes {}^t v) = {}^t(u \otimes v) \circ m_2$.

Réponse.
Soit $(\varphi, \psi) \in E_2^* \times F_2^*$, et soit $(x, y) \in E_1 \times F_1$. Alors, d'une part :

$$m_1(({}^t u \otimes {}^t v)(\varphi \otimes \psi))(x \otimes y) = m_1((\varphi \circ u) \otimes (\psi \circ v))(x \otimes y) = \varphi(u(x))\psi(v(y)),$$

et d'autre part :

$$({}^t(u \otimes v)(m_2(\varphi \otimes \psi))(x \otimes y) = m_2(\varphi \otimes \psi)(u(x) \otimes v(y)) = \varphi(u(x))\psi(v(y)).$$

Les applications linéaires $m_1(({}^t u \otimes {}^t v)(\varphi_1 \otimes \psi_2))$ et ${}^t(u \otimes v)(m_2(\varphi_2 \otimes \psi_2))$ coïncident sur les tenseurs décomposés de $E_1 \otimes F_1$, donc sont égales. Ainsi, les applications linéaires $m_1 \circ ({}^t u \otimes {}^t v)$ et ${}^t(u \otimes v) \circ m_2$ coïncident sur les tenseurs décomposés de $E_2^* \otimes F_2^*$, et sont donc égales.