Licence de mathématiques

Algèbre linéaire et bilinéaire 2020-2021

AL3 - Contrôle continu 1 - 7 octobre 2020

Durée : 1h

Exercice 1.

Soit E un K-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. On note $\pi : E \to E/F$ la projection canonique et $F^0 = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in F,\ \varphi(x) = 0\}$.

1. Rappeler la définition de l'application linéaire transposée ${}^t\pi : (E/F)^* \to E^*$.

   Solution: L'application ${}^t\pi$ est définie par la formule ${}^t\pi(\varphi) = \varphi \circ \pi$, pour $\varphi \in (E/F)^*$.

2. Démontrer que ${}^t\pi$ est injective.

   Solution: Soit $\varphi_0 \in \ker \pi$, alors $\ker \varphi_0 \supset \pi(E) = E/F$ car π est surjectif, donc $\varphi_0 = 0$. Cela montre que ${}^t\pi$ est injectif.

3. Démontrer que l'image de ${}^t\pi$ est F^0.

   Solution: Soit $\varphi_0 \in (E/F)^*$, alors $F \subset \ker {}^t\pi(\varphi)$ donc ${}^t\pi(\varphi) \in F^0$.
   Réciproquement, soit $\varphi \in F^0$, alors $F \subset \ker \varphi$, donc par propriété universelle du quotient, il existe $\varphi_0 \in (E/F)^*$ telle que $\varphi = \varphi_0 \circ \pi =^t \pi(\varphi_0)$.

4. En déduire que ${}^t\pi$ induit un isomorphisme $(E/F)^* \to F^0$.

   Solution: La corestriction de ${}^t\pi$ à son image F^0 est surjective par définition, et injective d'après la question 2. C'est donc un isomorphisme.

Exercice 2.

Soient E, F, E', F' des K-espaces vectoriels de dimension finie. Le but de cet exercice est de lever une ambiguïté sur la notation « $u \otimes v$ » lorsque $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E', F')$: ce produit tensoriel a un sens dans $\mathcal{L}(E, F) \otimes \mathcal{L}(E', F')$ et nous avons également défini avec cette notation un élément de $\mathcal{L}(E \otimes E', F \otimes F')$. Nous allons montrer que ces deux notions coïncident naturellement.

1. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E', F')$. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $u \boxtimes v : E \otimes E' \to F \otimes F'$ telle que pour tout $(x, x') \in E \times E'$,

   $$(u \boxtimes v)(x \otimes x') = u(x) \otimes v(x').$$

   (Nous utiliserons provisoirement cette notation $\boxtimes$ pour éviter la confusion avec le produit $u \otimes v$ dans $\mathcal{L}(E, F) \otimes \mathcal{L}(E', F')$.)

   Solution: L'application définie sur $E \times E'$ par la formule $(x, x') \mapsto u(x) \otimes v(x')$ est bilinéaire par linéarité de u, v et bilinéarité du produit tensoriel. Par propriété universelle du produit tensoriel, il existe donc une unique application linéaire $u \boxtimes v : E \otimes E' \to F \otimes F'$ telle que pour tout $(x, x') \in E \times E'$, $(u \boxtimes v)(x \otimes x') = u(x) \otimes v(x')$.

2. (a) Démontrer que l'application

   $$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(E', F') & \to & \mathcal{L}(E \otimes E', F \otimes F') \\ (u, v) & \mapsto & u \boxtimes v \end{array} \right.$$

   est bilinéaire.

Solution: Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in K$. Soit $v \in \mathcal{L}(E',F')$. Pour $(x,x') \in E \times E'$, on a

$$(u_1 + \lambda u_2) \boxtimes v(x \otimes x') = u_1(x) \otimes v(x') + \lambda u_2(x) \otimes v(x') = (u_1 \boxtimes v + \lambda(u_2 \boxtimes v))(x \otimes x'),$$

par bilinéarité du produit tensoriel. Les applications linéaires $(u_1+\lambda u_2)\boxtimes v$ et $u_1 \boxtimes v + \lambda(u_2 \boxtimes v)$ coïncident alors sur la famille génératrice $\{x \otimes x',\ x \in E, x' \in E'\}$ de $E \otimes E'$, elles sont donc égales (on pourrait aussi invoquer l'unicité de l'application linéaire $x \otimes x' \mapsto u_1(x) \otimes v(x') + \lambda u_2(x) \otimes v(x')$) . Ainsi, $(u,v) \mapsto u \boxtimes v$ est linéaire à gauche. On démontre de même sa linéarité à droite.

(b) En déduire qu'il existe une unique application linéaire $T : \mathcal{L}(E,F) \otimes \mathcal{L}(E',F') \to \mathcal{L}(E \otimes E', F \otimes F')$ telle que pour tout $(u,v) \in \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(E',F')$, $T(u \otimes v) = u \boxtimes v$.

Solution: L'application considérée dans la question précédente étant bilinéaire, la propriété universelle du produit tensoriel assure l'existence et l'unicité d'un tel T.

3. Soient (e_i), (e'_i), (f_i), (f'_i) des bases respectives de E, E', F, F'. On note n, n', m, m' les dimensions respectives de ces espaces.

(a) Soient $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $u_{ij} : E \to F$ telle que pour tout $1 \leq k \leq n$, $u_{ij}(e_k) = \delta_{jk} f_i$.

Solution: La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ étant une base de E, pour toute application $f : \{e_1, \ldots, e_n\} \to F$, il existe une unique application linéaire $E \to F$ qui coïncide avec f sur $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Ici, en considérant f_{ij} définie par $f_{ij}(e_k) = \delta_{jk} f_i$, on obtient l'existence et l'unicité de u_{ij}.

(b) Démontrer que $(u_{ij})_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E,F)$.

Solution: Comme $\dim \mathcal{L}(E,F) = mn$, il suffit de montrer que la famille (u_{ij}) est libre. Soit (λ_{ij}) une famille de scalaires indexée par $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$. On suppose que $\sum_{i,j} \lambda_{ij} u_{ij} = 0$. Soit $1 \leq k \leq n$. En évaluant en e_k, il vient :

$$0 = \sum_{i,j} \lambda_{ij} u_{ij}(e_k) = \sum_i \lambda_{ik} f_i.$$

Comme la famille (f_i) est libre, on a $\lambda_{ik} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ceci valant pour tout $1 \leq k \leq n$, la famille u_{ij} est libre.

On définit de même la base (v_{pq}) de $\mathcal{L}(E',F')$ par la relation $v_{pq}(e'_r) = \delta_{qr} f'_p$.

4. (a) Soient $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq p \leq m'$, $1 \leq q \leq n'$. Soient $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq r \leq n'$. Exprimer $(u_{ij} \boxtimes v_{pq})(e_k \otimes e'_r)$ sur la base $(f_i \otimes f'_p)$ de $F \otimes F'$.

Solution: Par définition, $u_{ij} \boxtimes v_{pq}(e_k \otimes e'_r) = \delta_{jk} f_i \otimes \delta_{qr} f'_p = (\delta_{jk}\delta_{qr}) f_i \otimes f'_p$ par bilinéarité du produit tensoriel.

(b) Démontrer que la famille $u_{ij} \boxtimes v_{pq}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E \otimes E', F \otimes F')$.

Solution: Soit (λ_{ijpq}) une famille de scalaires indexée par $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n'\} \times \{1, \ldots, m'\}$. On suppose que $\sum_{i,j,p,q} \lambda_{ijpq} u_{ij} \boxtimes v_{pq} = 0$. Soient $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq r \leq n'$. En évaluant en $e_k \otimes e'_r$, il vient :

$$0 = \sum_{i,j,p,q} \lambda_{ijpq} \delta_{jk} \delta_{qr} f_i \otimes f'_p = \sum_{i,p} \lambda_{ikpr} (f_i \otimes f'_p).$$

Comme les familles f_i et f'_p sont libres, la famille $f_i \otimes f'_p$ l'est aussi, et donc pour tout (i,p), $\lambda_{ikpr} = 0$. Ceci vaut pour toutes les valeurs de k et r, donc la famille $u_{ij} \boxtimes v_{pq}$ est libre.

(c) En déduire que l'application linéaire T est un isomorphisme.

Solution: L'application T est injective car l'image de la base $u_{ij} \otimes v_{pq}$ est la famille libre $u_{ij} \boxtimes v_{pq}$. L'espace de départ et l'espace d'arrivée étant tous deux de dimensions $mnm'n'$, c'est un isomorphisme.

Exercice 3.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. Soit $x_1, \dots, x_n$ une famille d'éléments de E.

1. Démontrer que $\sum_{1 \leq i \leq n} e_i \wedge x_i = 0$ si et seulement si pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $e_i^*(x_j) = e_j^*(x_i)$.

Solution: Pour $1 \leq i \leq n$, on a $x_i = \sum_{j=1}^n e_j^*(x_i)$. On obtient donc

$$\sum_{i=1}^n e_i \wedge x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_j^*(x_i)(e_i \wedge e_j),$$

par bilinéarité du produit extérieur. En utilisant l'antisymétrie et en décomposant sur la base $e_i \wedge e_j$ $(i < j)$ de $\bigwedge^2 E$ (on suppose ici que $\mathrm{car}(K) \neq 2$), on a

$$\sum_{i=1}^n e_i \wedge x_i = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (e_j^*(x_i) - e_i^*(x_j))(e_i \wedge e_j).$$

Ainsi, $\sum_{i=1}^n e_i \wedge x_i = 0$ si et seulement si pour tout $1 \leq i < j \leq n$, $e_j^*(x_i) = e_i^*(x_j)$.

2. Soit $y_1, \dots, y_p$ une famille libre de E et $z_1, \dots, z_p$ une famille d'éléments de E. Démontrer que $\sum_{i=1}^p y_i \wedge z_i = 0$ si et seulement s'il existe une matrice symétrique $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_p(K)$ telle que pour tout $1 \leq i \leq p$, $z_i = \sum_{1 \leq j \leq p} a_{ij} y_j$.

Solution: Supposons l'existence d'une telle matrice A. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(y_1, \dots, y_p)$, alors la famille libre $(y_1, \dots, y_p)$ est une base de F. En notant (y_i^*) sa base duale, on obtient $a_{ij} = y_j^*(z_i)$ pour tous $1 \leq i, j \leq p$. Ainsi, $y_i^*(z_j) = y_j^*(z_i)$, et d'après la question précédente, on a alors $\sum_{1 \leq i \leq n} y_i \wedge z_i = 0$.
Réciproquement, supposons que $\sum_{i=1}^p y_i \wedge z_i = 0$. On complète $(y_1, \dots, y_p)$ en une base $(y_1, \dots, y_n)$ de E, et on pose $z_{p+1} = \cdots = z_n$. On a encore $\sum_{i=1}^n y_i \wedge z_i = 0$, donc d'après la question précédente, pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $y_i^*(z_j) = y_j^*(z_i)$. Pour $p+1 \leq i \leq n$, $z_i = 0$, donc $y_j^*(z_i) = 0$. Ainsi, $y_i^*(z_j) = 0$. Cela montre que pour tout $1 \leq i \leq p$, $z_j = \sum_{j=1}^n y_i^*(z_j) y_i = \sum_{j=1}^p y_i^*(z_j) y_i$. En posant $a_{ij} = y_i^*(z_j)$ pour $1 \leq i, j \leq p$, on a donc bien pour tous $1 \leq i, j \leq p$, $z_i = \sum_j a_{ij} y_j$, et $a_{ij} = a_{ji}$.