UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre linéaire 3

CC1 : durée 1 heure

Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. ***Toutes les réponses devront être dûment justifiées****.*

Exercice 1

Soient E, F des espaces vectoriels sur un corps K et $u \in \mathscr{L}_K(E,F)$. On note ${}^t u \in \mathscr{L}_K(F^*, E^*)$ le transposé de u. Montrer que $\mathrm{Im}({}^t u) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$ où $\mathrm{Ker}(u)^\perp$ désigne le sous-espace vectoriel de E^* formé des formes linéaires $\phi \in E^*$ telles que $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Ker}(u)$. *(On pourra fixer un supplémentaire de* $\mathrm{Im}(u)$ *dans* F*.)*

Exercice 2

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K et $\phi_1, \dots, \phi_r \in E^*$ des formes linéaires sur E. On considère l'application

$$\begin{aligned} b : E \times F &\to F^r \\ (x,y) &\mapsto (\phi_1(x)y, \dots, \phi_r(x)y) \end{aligned}$$

1 Justifiez que b est bilinéaire.
2 En déduire qu'il existe une et une seule application linéaire $u : E \otimes F \to F^r$ telle que $u(x \otimes y) = b(x,y)$ pour tout $x \in E$ et $y \in F$.
3 On suppose que la famille $\mathscr{L} := (\phi_1, \dots, \phi_r)$ est libre et on la complète en une base $\mathscr{B}^* = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de E^*. On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base préduale. Déterminer l'image par u de $e_i \otimes y$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. En déduire que u est surjective.

Exercice 3

Soit E un K-espace vectoriel. On fixe un vecteur $x \in E$ et une forme linéaire $\phi \in E^*$. Pour $k \geqslant 0$, on note $\Lambda^k E$ la k-ème puissance extérieure de E (on a $\Lambda^1 E = E$ et $\Lambda^0 E = K$).
1 Soit $k \geqslant 1$. Montrer qu'il existe une unique application K-linéaire $L_x : \Lambda^k E \to \Lambda^{k+1} E$ telle que, pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, on ait $L_x(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = x \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$.
2 Montrer qu'il existe une unique application linéaire $i_{\phi,2} : \Lambda^2 E \to E$ telle que, pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$, on ait $i_{\phi,2}(x_1 \wedge x_2) = \phi(x_1)x_2 - \phi(x_2)x_1$.
3 Montrer par récurrence sur $k \geqslant 3$, qu'il existe une et une seule application linéaire $i_{\phi,k} : \Lambda^k E \to \Lambda^{k-1} E$ telle que pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, on ait

$$i_{\phi,k}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = \phi(x_1)x_2 \wedge \cdots \wedge x_k - x_1 \wedge i_{\phi,k-1}(x_2 \wedge \cdots \wedge x_k)$$

4 Montrer, que, pour tout $k \geqslant 2$, l'application $L_x i_{\phi,k} + i_{\phi,k+1} L_x$ est la multiplication par $\phi(x)$ sur $\Lambda^k E$.

Exercice 1 :

Remarquons tout d'abord que $\mathrm{Im}({}^t u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)^\perp$. En effet si $\Phi \in \mathrm{Im}({}^t u)$ on peut trouver une forme linéaire $\Psi \in F^*$ telle que $\Phi = \Psi \circ u$ ce qui assure en particulier que $\Phi(x) = \Psi \circ u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Ker}(u)$ et donc que Φ appartient à $\mathrm{Ker}(u)^\perp$.

Réciproquement, supposons que $\Phi \in \mathrm{Ker}(u)^\perp$. Notons $\pi : E \longrightarrow E/\mathrm{Ker}\, u$ la projection canonique. Par définition $\mathrm{Ker}(u) \subseteq \mathrm{Ker}\,\Phi$ et il existe donc une et une seule forme linéaire $\overline{\Phi} \in (E/\mathrm{Ker}\, u)^*$ telle que $\overline{\Phi} \circ \pi = \Phi$. Par ailleurs le <u>théorème d'isomorphisme</u> de Noether assure qu'il existe une et une seule application linéaire $\overline{u} \in \mathcal{L}(E/\mathrm{Ker}\, u, \mathrm{Im}\, u)$ telle que $\overline{u} \circ \pi = u$ et que de plus $\overline{u}$ est un isomorphisme. Fixons un supplémentaire G de l'image de u dans F et notons $\Psi \in F^*$ l'unique forme linéaire qui soit nulle sur G et égale à la composition $\overline{\Phi} \circ \overline{u}^{-1}$ sur $\mathrm{Im}\, u$. On a alors $\Psi \circ u(x) = \overline{\Phi} \circ \pi(x) = \Phi(x)$ pour x dans E ce qui montre que $\Phi \in \mathrm{Im}({}^t u)$.

Exercice 2 :

1) Pour $i \in [\![1, r]\!]$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & \Phi_i(x)\, y \end{array}$$

est bilinéaire puisque Φ_i est linéaire et la multiplication par un scalaire dans F est bilinéaire Cela assure que b est <u>bilinéaire</u>.

2) La propriété universelle du produit tensoriel assure <u>donc</u> qu'il existe une et une seule application linéaire $u : E \otimes F \longrightarrow F^r$ telle que pour tout $(x, y) \in E \times F$ on ait $u(x \otimes y) = b(x, y)$.

3) Avec les notations de l'énoncé, on a donc

$$u(e_i \otimes y) = \big(\Phi_1(e_i)\, y, \ldots, \Phi_r(e_i)\, y\big) = (0, \ldots, 0, \underbrace{y}_{i\text{ème position}}, 0, \ldots, 0)$$

puisque $\Phi_j(e_i) = 0$ si $j \neq i$ et $\Phi_i(e_i) = 1$. En particulier si $(y_1, \ldots, y_r) \in F^r$, on a $u\Big(\sum_{i=1}^{r} e_i \otimes y_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} u(e_i \otimes y_i) = (y_1, \ldots, y_r)$ ce qui montre que u est <u>surjective</u>.

Exercice 3:

1) L'application

$$\begin{array}{ccc} E^k & \longrightarrow & \Lambda^{k+1}E \\ (x_2,\dots,x_{k+1}) & \longmapsto & x\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_{k+1}\end{array}$$

étant multilinéaire alternée, il existe une et une seule application linéaire $L_x:\Lambda^k E\longrightarrow\Lambda^{k+1}E$ telle que $L_x(x_2\wedge\dots\wedge x_{k+1}) = x\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_{k+1}$.

2) L'application

$$\begin{array}{rccc}\lambda: & E^2 & \longrightarrow & E \\ & (x_1,x_2) & \longmapsto & \Phi(x_1)x_2 - x_2\Phi(x_1)\end{array}$$

est bilinéaire et alternée puisque $\lambda(x,x) = \Phi(x)x - x\Phi(x) = 0$ pour $x\in E$. Il existe donc une et une seule application linéaire $i_{\Phi,2}:\Lambda^2E\longrightarrow E$ telle que $i_{\Phi,2}(x_1\wedge x_2) = \lambda(x_1,x_2)$.

3) Dans la question précédente, on a construit $i_{\Phi,2}$. Pour construire $i_{\Phi,3}$ considérons l'application multilinéaire

$$\begin{array}{rccc}\mu: & E^3 & \longrightarrow & \Lambda^2E \\ & (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & \Phi(x_1)x_2\wedge x_3 - x_1\wedge i_{\Phi_2}(x_2\wedge x_3).\end{array}$$

Elle est <u>alternée</u>. En effet si $x_2 = x_3$ alors $x_2\wedge x_3 = 0$ et $\mu(x_1,x_2,x_3) = 0$. Si $x_1 = x_2$, alors

$$\begin{aligned}\mu(x_1,x_2,x_3) &= \Phi(x_1)x_1\wedge x_3 - x_1\wedge[\Phi(x_1)\wedge x_3 - \Phi(x_3)x_1] \\ &= \Phi(x_1)x_1\wedge x_3 - \Phi(x_1)x_1\wedge x_3 - \Phi_3 x_1\wedge x_1 = 0\end{aligned}$$

et de même $\mu(x_1,x_2,x_3) = 0$ si $x_1 = x_3$. La propriété universelle de la puissance extérieure montre donc l'existence de $i_{\Phi,3}$. Supposons $k\geq 4$, pour montrer l'existence et l'unicité de $i_{\Phi,k}$ il suffit de vérifier que l'application <u>multilinéaire</u>

$$\begin{array}{rccc}\mu: & E^k & \longrightarrow & \Lambda^{k-1}E \\ & (x_1,\dots,x_k) & \longmapsto & \Phi(x_1)x_2\wedge\dots\wedge x_k - x_1\wedge i_{\Phi,k-1}(x_2\wedge\dots\wedge x_k)\end{array}$$

est <u>alternée</u>. Supposons qu'il existe $i<j\in[\![1,k]\!]$ tel que $x_i = x_j$. Si $i\neq 1$, alors $x_2\wedge\dots\wedge x_k = 0$ et donc $\mu(x_1,\dots,x_k) = 0$. On peut donc supposer $i=1$. Dans ce cas, quitte à permuter x_2 et x_j, on peut supposer $j=2$. On a alors en posant $y = x_3\wedge\dots\wedge x_k$ bien

$$\mu(x_1,\dots,x_k) = \Phi(x_1)x_1\wedge y - \Phi(x_1)x_1\wedge y + x_1\wedge x_1\wedge i_{\Phi,k-2}(y) = 0.$$

4) Comme tout élément de $\Lambda^k E$ est une somme finie de vecteurs de la forme $x_1 \wedge \dots \wedge x_k$ avec $x_1, \dots, x_k \in E$, il suffit de montrer que

$$L_x \circ i_{\phi,k}(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) + i_{\phi,k+1} \circ L_x(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) = \phi(x)\, x_1 \wedge \dots \wedge x_k .$$

Or par définition

$$\begin{aligned} i_{\phi,k+1} \circ L_x(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) &= i_{\phi,k+1}(x \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_k) = \phi(x)\, x_1 \wedge \dots \wedge x_k - x \wedge i_{\phi,k}(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) \\ &= \phi(x)\, x_1 \wedge \dots \wedge x_k - L_x \circ i_{\phi,k}(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) \end{aligned}$$

ce qui conclut.