UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre linéaire 3

CC1 : durée 1 heure

Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. ***Toutes les réponses devront être dûment justifiées****.*

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Existe-t-il un endomorphisme $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ dont le polynôme minimal soit $X+1$ et le polynôme caractéristique X^3+X^2+X+1 ?

Exercice 2

Soient K un corps et E, F des K-espaces vectoriels

1 Justifiez qu'il existe une et une seule application K-linéaire

$$\alpha : F \otimes E^* \to \mathrm{Hom}_K(E,F)$$

telle que, pour tout $y \in F$ et tout $\phi \in E^*$, $\alpha(y \otimes \phi) \in \mathrm{Hom}_K(E,F)$ soit l'application K-linéaire

$$\begin{aligned} E &\to F \\ x &\mapsto \phi(x)y. \end{aligned}$$

2 On suppose E de dimension finie n. On fixe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et on note $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale. On pose pour tout $u \in \mathrm{Hom}_K(E,F)$

$$\beta(u) = \sum_{i=1}^{n} u(e_i) \otimes e_i^*.$$

Montrer que $\beta : \mathrm{Hom}_K(E,F) \to F \otimes_K E^*$ est une application K-linéaire telle que $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}$ et $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}$.

3 En déduire que α est un isomorphisme lorsque E est de dimension finie.

Exercice 3

Soient K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathrm{End}_K(E)$. On dit que u est simple si et seulement si $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espaces stables par u de E. On se propose de montrer que u est simple si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u est irréductible dans $K[X]$.

1 Montrer que si χ_u est irréductible dans $K[X]$ alors u est simple.

2 Soit $x \in E$ non nul. On pose $F_x := \mathrm{Vec}\langle u^k(x) : k \in \mathbb{N}\rangle$. Montrer que F_x est un sous-espace vectoriel stable par u et que si $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est le plus grand entier tel que $(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$ soit libre, alors $(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$ est une base de F_x.

3 On suppose u simple.

a Soit $x \in E$ non nul. Montrer que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

b En déduire que si $P \in K[X]$ est unitaire de degré $< n$ alors l'endomorphisme $P(u)$ est bijectif.

c Montrer que χ_u est irréductible dans $K[X]$.