AL3

Séance 9 : Adjoint. Espaces euclidiens et hermitiens.

ENS Rennes

4 novembre 2020

Séance précédente

- Existence de base orthogonales, algorithme de Gauss.
- Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$.
- Signature d'une forme quadratique réelle.

Groupe orthogonal d'une forme quadratique

Définition 9.1

Soit (E, q) un espace quadratique. On appelle *groupe orthogonal* de (E, q), noté $O(q)$, le groupe des isométries de (E, q).

Groupe orthogonal d'une forme quadratique

Définition 9.1

Soit (E, q) un espace quadratique. On appelle *groupe orthogonal* de (E, q), noté $O(q)$, le groupe des isométries de (E, q).

Exemple

Soit $x \in E$ un vecteur non isotrope, on appelle réflexion d'axe x l'application

$$\sigma_x : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ y & \mapsto & y - 2\frac{b(x,y)}{q(x)}x \end{array} .$$

C'est une isométrie.

Structure de $O(q)$

Théorème 9.1

Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré. Alors $O(q)$ engendré par les réflexions.

Adjoint d'une application linéaire

Proposition 9.2

Soient (E, q), (E', q') des espaces quadratiques, de formes polaires respectives b, b'. On suppose que (E, q) est non dégénéré et de dimension finie.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$. Alors il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E', E)$ tel que pour tous $x \in E, y \in E'$:

$$b'(u(x), y) = b(x, u^*(y)).$$

Adjoint d'une application linéaire

Proposition 9.2

Soient (E, q), (E', q') des espaces quadratiques, de formes polaires respectives b, b'. On suppose que (E, q) est non dégénéré et de dimension finie.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$. Alors il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E', E)$ tel que pour tous $x \in E, y \in E'$:

$$b'(u(x), y) = b(x, u^*(y)).$$

Définition 9.2

Sous les hypothèses précédentes, u^* s'appelle *adjoint* de u.

Adjoint : propriétés

Proposition 9.3

Soient (E, q) et (E', q') de dimension finie, non dégénérés. Alors :

- L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, E') & \to & \mathcal{L}(E', E) \\ u & \mapsto & u^* \end{array}$$

  est un isomorphisme, et $u = (u^*)^*$.
- si $(E, q) = (E', q')$, alors pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$, on a $(uv)^* = v^* u^*$.

Adjoint : propriétés

Proposition 9.3

Soient (E, q) et (E', q') de dimension finie, non dégénérés. Alors :

- L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, E') & \to & \mathcal{L}(E', E) \\ u & \mapsto & u^* \end{array}$$

  est un isomorphisme, et $u = (u^*)^*$.
- si $(E, q) = (E', q')$, alors pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$, on a $(uv)^* = v^* u^*$.

Proposition 9.4

Soit (E, q) de dimension finie, non dégénéré. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit $F \subset E$ un sous-espace stable par u.
Alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Endomorphismes normaux

Définition 9.3

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est *normal* si u et u^* commutent.

Endomorphismes normaux

Définition 9.3

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est *normal* si u et u^* commutent.

Exemple

- *u autoadjoint :* $u^* = u$
- $u \in O(q)$ *:* $u^* = u^{-1}$
- *u antisymétrique :* $u^* = -u$.

Endomorphismes normaux

Définition 9.3

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est *normal* si u et u^* commutent.

Exemple

- u *autoadjoint* : $u^* = u$
- $u \in O(q)$: $u^* = u^{-1}$
- u *antisymétrique* : $u^* = -u$.

Proposition 9.5

Soit (E, q) de dimension finie, non dégénéré. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est normal. Alors pour tout $P \in K[X]$, $\ker P(u)$ est stable par u^*.

Formes sesquilinéaires

Définition 9.4

Soit E, F des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application. On dit que u est *semi-linéaire* si

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ u(\lambda x + y) = \bar{\lambda} u(x) + u(y).$$

Définition 9.5

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une *forme sesquilinéaire* sur E est une application $f : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que :

- $\forall y \in E$, $f(\cdot, y)$ est linéaire ;
- $\forall x \in E$, $f(x, \cdot)$ est semi-linéaire.

Formes hermitiennes et produits scalaires

Définition 9.6

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une *forme hermitienne* sur E est une forme sesquilinéaire f vérifiant de plus la relation

$$\forall x, y \in E,\ f(x,y) = \overline{f(y,x)}.$$

Définition 9.7

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$). Un produit scalaire sur E est la donnée d'une forme hermitienne (resp. bilinéaire symétrique) f telle que :

- $\forall x \in E$, $f(x,x) \in \mathbb{R}_+$ (positive)
- $\forall x \in E$, $f(x,x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ (définie).

Espaces euclidiens et hermitiens

Définition 9.8

Un espace hermitien (resp. euclidien) est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) muni d'un produit scalaire.

Exemple

- $\mathbb{R}^n$ *muni de* $(x, y) \mapsto \sum_i x_i y_i$,
- $\mathbb{C}^n$ *muni de* $(x, y) \mapsto \sum_i x_i \bar{y}_i$.
- $\mathbb{C}[X]_{<d}$ *muni de* $\int_a^b P(t)\overline{Q(t)}dt$.

Définition 9.9

La matrice du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en base (e_i) est la matrice $M = (\langle e_i, e_j \rangle)$, de sorte que $\langle x, y \rangle = {}^t X M \bar{Y}$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme euclidienne

Proposition 9.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien ou hermitien. Alors :

$$\forall x, y \in E, \ |\langle x, y \rangle|^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle .$$

Corollaire 9.7

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien ou hermitien. Alors

$$x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une norme sur E.

Orthogonalité

Définition 9.10

Soit E un espace euclidien (resp. hermitien). Soit $A \subset E$, l'orthogonal de A est

$$A^{\perp} = \{x \in E,\ \forall y \in A,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Théorème 9.8

Soit E euclidien ou hermitien, alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ y & \mapsto & f_y : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & K \\ x & \mapsto & \langle x, y\rangle \end{array} \right. \end{array}$$

est un isomorphisme (resp. un isomorphisme semi-linéaire).

Corollaire 9.9

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

Orthonormalisation d'une famille libre

Proposition 9.10

Soit E euclidien ou hermitien. Soit $x_1, \dots, x_k$ une famille libre. Alors il existe une unique famille $e_1, \dots, e_k$ telle que :

- La famille e_i est orthonormale ;
- $\forall 1 \leqslant i \leqslant k$, $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_i) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$;
- $\forall 1 \leqslant i \leqslant k$, $\langle x_i, e_i \rangle > 0$.

Corollaire 9.11

Tout espace euclidien ou hermitien admet une base orthonormée.

Algorithme de Gram-Schmidt

Soit $x_1, \ldots, x_k$ une famille libre d'un espace vectoriel euclidien ou hermitien.

1. $e_1 = x_1 / \|x_1\|$.
2. Pour $2 \leqslant i \leqslant k$:

$$z_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, e_j \rangle e_j$$

$$e_j = z_j / \|z_j\|$$

Adjoint d'un endomorphisme

Proposition 9.12

Soit E euclidien ou hermitien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tous $x, y \in E$,

$$\langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle .$$

Définition 9.11

L'endomorphisme u est l'*adjoint* de u.

Remarque

Dans une base orthonormée, on a :

$$Mat(u^*) = {}^t\overline{Mat(u)}.$$

Endomorphismes normaux

Définition 9.12

Soit E euclidien ou hermitien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est *normal* si u et u^* commutent.

Exemple

- *u autoadjoint (ou symétrique) : $u^* = u$*
- *u unitaire (ou orthogonal) : $u^* u = id$*
- *u anti-autoadjoint (ou antisymétrique) : $u^* = -u$.*