AL3

Séance 8 : Classification des espaces quadratiques. Groupe orthogonal. Adjoint.

ENS Rennes

21 octobre 2020

Séance précédente

- Formes quadratiques, espaces quadratiques
- Morphismes métriques et isométries
- Formes quadratiques non dégénérées, théorème de représentation
- Point de vue matriciel, discriminant.

Orthogonalité

Définition 8.1

Soit (E, q) un espace quadratique de forme polaire b, et soit $A \subset E$. On appelle *orthogonal* de A l'ensemble

$$A^{\perp} = \{y \in E \mid \forall x \in A,\ b(x, y) = 0\}.$$

On dit que B est orthogonal à A si $B \subset A^{\perp}$.
Une somme directe $E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ est dite orthogonale si pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant r$, $i \neq j \Rightarrow E_i \subset E_j^{\perp}$.

Orthogonalité

Définition 8.1

Soit (E, q) un espace quadratique de forme polaire b, et soit $A \subset E$. On appelle *orthogonal* de A l'ensemble

$$A^{\perp} = \{y \in E \mid \forall x \in A,\ b(x, y) = 0\}.$$

On dit que B est orthogonal à A si $B \subset A^{\perp}$.
Une somme directe $E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ est dite orthogonale si pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant r$, $i \neq j \Rightarrow E_i \subset E_j^{\perp}$.

Remarque

- $N(q) = E^{\perp}$, $I(q) = \{x \in E \mid x \in \{x\}^{\perp}\}$.
- *Soit $F \subset E$ un supplémentaire de $N(q)$, alors $E = F \oplus N(q)$, la somme est orthogonale, et $q_{|F}$ est non dégénérée.*

Cas des formes non dégénérées

Proposition 8.1

Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré de dimension finie, et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.
Alors $F^\perp = \varphi_q^{-1}(F^0)$. En particulier,

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E.$$

Cas des formes non dégénérées

Proposition 8.1

Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré de dimension finie, et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.
Alors $F^\perp = \varphi_q^{-1}(F^0)$. En particulier,

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E.$$

Remarque

En général, on n'a pas $E = F \oplus F^\perp$.

Cas des formes non dégénérées

Proposition 8.1

Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré de dimension finie, et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.
Alors $F^\perp = \varphi_q^{-1}(F^0)$. En particulier,

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E.$$

Remarque

En général, on n'a pas $E = F \oplus F^\perp$.

Proposition 8.2

Sous les mêmes hypothèses, on a $E = F \oplus F^\perp$ si et seulement si $F \cap F^\perp = 0$ *i.e.* $q_{|F}$ est non dégénérée.

Bases orthogonales

Théorème 8.3

Soit (E, q) un espace quadratique de dimension finie n. Soit $\mathcal{F}$ une famille de représentants de $K^\times/(K^\times)^2$. Il existe une base de E constituée d'éléments (e_i) deux à deux orthogonaux, telle que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $q(e_i) \in \mathcal{F} \cup \{0\}$.

Réduction de Gauss

Proposition 8.4

Il existe un algorithme permettant d'écrire une forme quadratique en coordonnées sous la forme

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} a_i f_i(x_1, \ldots, x_n)^2,$$

où les f_i sont des formes linéaires indépendantes et les $a_i \in K$.

Réduction de Gauss : algorithme

On écrit en coordonnées $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$.

1. Si un coefficient a_{ii} (disons a_{11}) est non nul, on écrit $q(x)$ comme :

$$a_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{2a_{11}} x_j\right)^2 \underbrace{- \frac{1}{4a_{11}}\left(\sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j\right)^2 + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j}_{q'}$$

   et on réapplique l'algorithme à $q'(x_2, \dots, x_n)$.

2. Si $a_{ii} = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on fixe i, j tel que $a_{i,j} \neq 0$ (disons a_{12}) :

$$a_{12} \underbrace{(x_1 + f(x_3, \dots, x_n))}_{f_1} \underbrace{(x_2 + g(x_3, \dots, x_n))}_{f_2} - fg + q'(x_3, \dots, x_n),$$

   puis $f_1 f_2 = \frac{1}{4}\left[(f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2\right]$.

Réduction de Gauss : exemples

$q(x,y,z) = 3y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 4yz.$

- $= 3\left(y + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}z\right)^2 - \frac{1}{3}(x-2z)^2 - 2xz + z^2$
- $= 3\left(y + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}z\right)^2 - \frac{1}{3}\left(x^2 + z^2 + 2xz\right)$
- $= 3\left(y + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}z\right)^2 - \frac{1}{3}\left(x+z\right)^2$

$q(x,y,z) = xy + yz + zx.$

- $= (x+z)(y+z) - z^2$
- $= \frac{1}{4}[(x+y+2z)^2 - (x-y)^2] - z^2.$

Classification des formes quadratiques complexes

Proposition 8.5

Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est l'identité.

Classification des formes quadratiques complexes

Proposition 8.5

Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est l'identité.

Corollaire 8.6

Soient (E, q) et (E', q') deux espaces quadratiques sur $\mathbb{C}$. Alors (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement si $\dim E = \dim E'$ et $\operatorname{rg} q = \operatorname{rg} q'$.

Théorème 8.7 (d'inertie de Sylvester)

Soit (E, q) un espace quadratique de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, les entiers s et t ne dépendent pas du choix de la base.

Théorème 8.7 (d'inertie de Sylvester)

Soit (E, q) un espace quadratique de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, les entiers s et t ne dépendent pas du choix de la base.

Définition 8.2

Soit (E, q) un espace quadratique réel de dimension finie. On appelle *signature* de la forme q le couple (s, t).

Remarque

- *Si (s, t) est la signature de q, alors $s + t$ est le rang de q.*
- *On peut calculer la signature en calculant la réduction de Gauss de q.*

Formes quadratiques réelles : exemples

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de $q(x, y, z) = y^2 - z^2 + 2(xy + xz)$. La signature de q est $(1, 2)$.

Remarque

Une forme quadratique réelle non dégénérée admet un vecteur isotrope non nul si et seulement si sa signature n'est pas de la forme $(n, 0)$ *ou* $(0, n)$*.*

Donc l'équation $q(x, y, z) = 0$ admet une solution non nulle.

Groupe orthogonal d'une forme quadratique

Définition 8.3

Soit (E, q) un espace quadratique. On appelle *groupe orthogonal* de (E, q), noté $O(q)$, le groupe des isométries de (E, q).

Groupe orthogonal d'une forme quadratique

Définition 8.3

Soit (E, q) un espace quadratique. On appelle *groupe orthogonal* de (E, q), noté $O(q)$, le groupe des isométries de (E, q).

Exemple

Soit $x \in E$ un vecteur non isotrope, on appelle réflexion d'axe x l'application

$$\sigma_x : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ y & \mapsto & y - 2\frac{b(x,y)}{q(x)}x \end{array} .$$

C'est une isométrie.

Structure de $O(q)$

Théorème 8.8

Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré. Alors $O(q)$ engendré par les réflexions.