AL3

Séance 7 : Espaces quadratiques.

ENS Rennes

14 octobre 2020

Séance précédente

- Décomposition de Frobenius et applications
- Décomposition de Dunford
- Contrôle continu

Formes quadratiques

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps de caractéristique différente de 2, et E est un K-espace vectoriel.

Définition 7.1

Soit $q : E \to K$. On dit que q est une *forme quadratique* sur E si

- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in K,\ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$;
- L'application $(x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$.

Formes quadratiques

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps de caractéristique différente de 2, et E est un K-espace vectoriel.

Définition 7.1

Soit $q : E \to K$. On dit que q est une *forme quadratique* sur E si

- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in K,\ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$;
- L'application $(x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$.

Définition 7.2

Soit $q : E \to K$ une forme quadratique, la forme bilinéaire symétrique $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$ s'appelle *forme polaire* de q.

Formes quadratiques

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps de caractéristique différente de 2, et E est un K-espace vectoriel.

Définition 7.1

Soit $q : E \to K$. On dit que q est une *forme quadratique* sur E si

- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in K,\ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$;
- L'application $(x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$.

Définition 7.2

Soit $q : E \to K$ une forme quadratique, la forme bilinéaire symétrique $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$ s'appelle *forme polaire* de q.

Proposition 7.1

La forme polaire de q est l'unique forme bilinéaire symétrique b sur $E \times E$ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = b(x, x)$.

Espaces quadratiques

Définition 7.3

On appelle *espace quadratique* sur K la donnée d'un couple (E, q) où E est un K-espace vectoriel et $q : E \to K$ est une forme quadratique.

Espaces quadratiques

Définition 7.3

On appelle *espace quadratique* sur K la donnée d'un couple (E, q) où E est un K-espace vectoriel et $q : E \to K$ est une forme quadratique.

Définition 7.4

Soient (E, q) et (E', q') des espaces quadratiques sur K.
Un *morphisme métrique* de E vers E' est une application linéaire $u : E \to E'$ telle que $q = q' \circ u$.
Une *isométrie* de E vers E' est un isomorphisme qui est un morphisme métrique.

Espaces quadratiques

Définition 7.3

On appelle *espace quadratique* sur K la donnée d'un couple (E, q) où E est un K-espace vectoriel et $q : E \to K$ est une forme quadratique.

Définition 7.4

Soient (E, q) et (E', q') des espaces quadratiques sur K.
Un *morphisme métrique* de E vers E' est une application linéaire $u : E \to E'$ telle que $q = q' \circ u$.
Une *isométrie* de E vers E' est un isomorphisme qui est un morphisme métrique.

But : classifier les espaces quadratiques à isométrie près.

Espaces quadratiques : exemples

- K^n muni de $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2$
- Plus généralement, $q(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$
- Encore plus généralement, $q(x) = \sum_{i=1}^r a_i f_i(x)^2$ où les f_i sont des formes linéaires sur E.
- $P \mapsto \int_0^1 P(t)P''(t)dt$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$.

Écriture en coordonnées

Soit (E, q) un espace quadratique de dimension finie, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On note souvent $q(x_1, \ldots, x_n)$ pour $q(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)$.

Proposition 7.2

L'application $q : E \to K$ est une forme quadratique si et seulement si son écriture en coordonnées est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées.

Espaces quadratiques non dégénérés

Définition 7.5

Soit (E, q) un espace quadratique sur K. Soit b la forme polaire de q. On appelle *noyau* de q :

$$N(q) = \{x \in E \mid \forall y \in E,\ b(x, y) = 0\}.$$

On dit que q est *non dégénérée* si $N(q) = \{0\}$ et *dégénérée* sinon.

Espaces quadratiques non dégénérés

Définition 7.5

Soit (E, q) un espace quadratique sur K. Soit b la forme polaire de q. On appelle *noyau* de q :

$$N(q) = \{x \in E \mid \forall y \in E,\ b(x, y) = 0\}.$$

On dit que q est *non dégénérée* si $N(q) = \{0\}$ et *dégénérée* sinon.

Remarque

$N(q) \subset I(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$

Théorème de représentation

Théorème 7.3

Soit (E, q) un espace quadratique de dimension finie et soit b la forme polaire de q. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La forme q est non dégénérée ;

(ii) L'application linéaire

$$\varphi_q : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \mapsto & f_x \end{array} \right. : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & K \\ y & \mapsto & b(x,y) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Remarque

$N(q) = \ker \varphi_q$

Formes non dégénérées : exemples

- $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2$ est non dégénérée.
- $(x, y) \mapsto xy$ est non dégénérée.
- $P \mapsto \int_0^1 P(t)P''(t)dt$ est dégénérée.

Point de vue matriciel

Définition 7.6

Soit (E, q) un espace quadratique de dimension finie, et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$, on appelle *matrice de q* en base $\mathcal{B}$ la matrice de $\varphi_q : E \to E^*$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$.

Point de vue matriciel

Définition 7.6

Soit (E, q) un espace quadratique de dimension finie, et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$, on appelle *matrice de q* en base $\mathcal{B}$ la matrice de $\varphi_q : E \to E^*$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$.

Proposition 7.4

Soit (E, q) un espace quadratique de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$. Alors M est symétrique. En outre, si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = {}^tPMP.$$

Point de vue matriciel

Définition 7.6

Soit (E, q) un espace quadratique de dimension finie, et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$, on appelle *matrice de q* en base $\mathcal{B}$ la matrice de $\varphi_q : E \to E^*$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$.

Proposition 7.4

Soit (E, q) un espace quadratique de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$. Alors M est symétrique. En outre, si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = {}^tPMP.$$

Définition 7.7

On appelle *rang* de q le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$, c'est-à-dire le rang de φ_q.

Classification : formulations du problème

Proposition 7.5

Soient (E, q) et (E', q') deux espaces quadratiques de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes ;

(i) Les espaces quadratiques E et E' sont isométriques ;

(ii) Il existe des bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ respectives de E et E' dans lesquelles q et q' ont la même matrice ;

(iii) Pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute base $\mathcal{B}'$ de E', il existe une matrice $P \in GL(E)$ telle que :

$$ {}^tP\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q'). $$

Discriminant d'une forme quadratique

Définition 7.8

On note $K/(K^\times)^2$ l'ensemble des classes de K pour la relation d'équivalence

$$x \sim y \text{ si } \exists z \in K^\times \mid x = z^2 y.$$

Discriminant d'une forme quadratique

Définition 7.8

On note $K/(K^\times)^2$ l'ensemble des classes de K pour la relation d'équivalence

$$x \sim y \text{ si } \exists z \in K^\times \mid x = z^2 y.$$

Définition 7.9

Soit (E, q) un espace quadratique de dimension finie et soit M la matrice de q dans une base de E. On appelle *discriminant* de q l'image de $\det(M)$ dans l'ensemble quotient $K/(K^\times)^2$. On le note $\mathrm{disc}(q)$.

Discriminant d'une forme quadratique

Définition 7.8

On note $K/(K^\times)^2$ l'ensemble des classes de K pour la relation d'équivalence

$$x \sim y \text{ si } \exists z \in K^\times \mid x = z^2 y.$$

Définition 7.9

Soit (E, q) un espace quadratique de dimension finie et soit M la matrice de q dans une base de E. On appelle *discriminant* de q l'image de $\det(M)$ dans l'ensemble quotient $K/(K^\times)^2$. On le note $\mathrm{disc}(q)$.

Proposition 7.6

Si (E, q) et (E', q') sont isométriques, alors $\mathrm{disc}(q) = \mathrm{disc}(q')$. L'espace (E, q) est non dégénéré si et seulement si $\mathrm{disc}(q) \neq 0$.