AL3

Séance 6 : Réduction de Frobenius. Décomposition de Dunford

ENS Rennes

7 octobre 2020

Réduction de Frobenius

Théorème 6.1 (Réduction de Frobenius)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe une unique famille de polynômes unitaires $P_1, \ldots, P_r$, et une famille $E_1, \ldots, E_r$ de sous-espaces vectoriels de E stables par u, telles que :

- $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r} E_i$
- L'endomorphisme induit par u sur E_i est cyclique de polynôme P_i
- $P_r | P_{r-1} | \ldots | P_1$.

Définition 6.1

La famille des P_i ne dépend pas du choix de la base ; on l'appelle la famille des *invariants de similitude* de u.

Réduction de Frobenius : schéma de la preuve

- On fixe $x \in E$ tel que $\pi_u = \pi_{u,x}$ et on note $F = \langle u^i(x) | i \in \mathbb{N} \rangle$
- On montre que F admet un supplémentaire stable par u
- On conclut par récurrence sur l'existence de la décomposition
- On prouve l'unicité.

Réduction de Frobenius : exemples

Exemple

- *Si u est cyclique, il admet un unique invariant de similitude égal à χ_u.*
- *Si $u = 0$, la famille de ses invariants de similitude est $(X, X, \ldots, X)$ (multiplicité égale à la dimension).*
- *Si u est nilpotent de blocs de Jordan de tailles $m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_r$, alors ses invariants de similitude sont $(X^{m_1}, \ldots, X^{m_r})$.*

Réduction de Frobenius : applications

Corollaire 6.2

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors u et v sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude.

Corollaire 6.3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec χ_u scindé à racines simples. Alors u est cyclique.

Corollaire 6.4

Les invariants de similitude (et en particulier le polynôme minimal) ne dépendent pas du corps de base.

Décomposition de Dunford

Proposition 6.5

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que χ_u est scindé. Alors il existe un unique couple (d, n) avec :

- d diagonalisable,
- n nilpotent,
- $dn = nd$,
- $u = d + n$.

En outre, d et n sont des polynômes en u.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$