AL3

Séance 5 : Réduction de Jordan, réduction de Frobenius.

ENS Rennes

30 septembre 2020

Séance précédente

Réduction des endomorphismes

- Polynômes d'endomorphismes
- Diagonalisabilité
- Réduction de Jordan

Réduction de Jordan pour les nilpotents

Théorème 5.1 (Jordan pour les nilpotents)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent. Alors il existe une unique famille d'entiers $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_r > 0$, et une base $\mathcal{B}$ de E, tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r} \end{pmatrix}$$

Lemme 5.2

Si la matrice u dans une base convenable est de la forme précédente, alors pour $j \geqslant 1$, le nombre de blocs de taille $\geqslant j$ est égal à $\dim \ker u^j - \dim \ker u^{j-1}$.

Réduction de Jordan

Définition 5.1

Soient $\lambda \in K$ et $n \in \mathbb{N}$, on appelle *bloc de Jordan* de taille n associé à λ la matrice $J_{\lambda,n} = \lambda I_n + J_n$.

Théorème 5.3 (Jordan)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que χ_u est scindé.
Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme $J_{\lambda,n}$.
De plus, les blocs qui apparaissent ne dépendent pas du choix de la base.

Réduction de Jordan

Corollaire 5.4

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que χ_u soit scindé.
Alors $v \in \mathcal{L}(E)$ est semblable à u si et seulement si χ_v est scindé et u et v ont les mêmes blocs de Jordan.

Exemple

Sur $K[X]_{<n}$, les applications $P \mapsto P + P'$ et $P \mapsto P(X+1)$ sont semblables.

Réduction de Jordan : calculs pratiques

$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\chi_M = X^3$, donc M est nilpotente.

Sa forme de Jordan est 0, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme rg $M = 2$, sa forme de Jordan est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Réduction de Jordan : calculs pratiques

$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, de forme de Jordan $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(M - 0.I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, donc Im M^2 a pour base $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On a $M^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, et $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dans la base

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, M est sous forme de Jordan.

Endomorphismes cycliques

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 5.2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est *cyclique* s'il existe $x \in E$ tel que $\{u^i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$ soit une famille génératrice de E.
Un tel $x \in E$ s'appelle un *vecteur cyclique* de u.

Remarque

Soit $x \in E$, alors $\langle u^i(x) \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ est le plus petit sous-espace stable par u contenant x.

Proposition 5.5

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors E est cyclique si et seulement s'il existe une base de E de la forme $(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$.

Matrice compagnon

Définition 5.3

Soit $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in K[X]$ unitaire, on appelle *matrice compagnon* associée à P la matrice :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Lemme 5.6

Soit $P \in K[X]$ unitaire, soit C_P sa matrice compagnon. Alors $\chi_{C_P} = P$.

Polynôme minimal en un élément

Définition 5.4

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $x \in E$. On définit le *polynôme minimal de u en x* comme l'unique générateur unitaire de l'idéal

$$\{P \in K[X] \mid P(u)(x) = 0\}.$$

On le note $\pi_{u,x}$.

Remarque

Pour tout $x \in E$, on a $\pi_{u,x} | \pi_u$.

Proposition 5.7

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $\pi_u = \pi_{u,x}$.

Endomorphismes cycliques : polynôme minimal, polynôme caractéristique

Lemme 5.8

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est cyclique

(ii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice compagnon

(iii) $\pi_u = \chi u$

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique, on dit que u est cyclique de polynôme P si $P = \chi_u = \pi_u$.

Réduction de Frobenius

Théorème 5.9 (Réduction de Frobenius)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe une unique famille de polynômes unitaires $P_1, \ldots, P_r$, et une famille $E_1, \ldots, E_r$ de sous-espaces vectoriels de E stables par u, telles que :

- $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r} E_i$
- L'endomorphisme induit par u sur E_i est cyclique de polynôme P_i
- $P_r | P_{r-1} | \ldots | P_1$.

Définition 5.5

La famille des P_i ne dépend pas du choix de la base ; on l'appelle la famille des *invariants de similitude* de u.

Réduction de Frobenius : exemples

Exemple

- *Si u est cyclique, il admet un unique invariant de similitude égal à χ_u.*
- *Si $u = 0$, la famille de ses invariants de similitude est $(X, X, \ldots, X)$ (multiplicité égale à la dimension).*
- *Si u est nilpotent de blocs de Jordan de tailles $m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_r$, alors ses invariants de similitude sont $(X^{m_1}, \ldots, X^{m_r})$.*

Réduction de Frobenius : applications

Corollaire 5.10

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors u et v sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude.

Corollaire 5.11

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec χ_u scindé à racines simples. Alors u est cyclique.

Corollaire 5.12

Les invariants de similitude (et en particulier le polynôme minimal) ne dépendent pas du corps de base.

Réduction de Frobenius : schéma de la preuve

- On fixe $x \in E$ tel que $\pi_u = \pi_{u,x}$ et on note $F = \langle u^i(x) | i \in \mathbb{N} \rangle$
- On montre que F admet un supplémentaire stable par u
- On conclut par récurrence sur l'existence de la décomposition
- On prouve l'unicité.

Décomposition de Dunford

Proposition 5.13

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que χ_u est scindé. Alors il existe un unique couple (d, n) avec :

- d diagonalisable,
- n nilpotent,
- $dn = nd$,
- $u = d + n$.

En outre, d et n sont des polynômes en u.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$