AL3

Séance 4 : Réduction des endomorphismes.

ENS Rennes

23 septembre 2020

Séance précédente

Puissances extérieures. Déterminant.

- Puissances extérieures d'un espace vectoriel.
- Base et base duale d'une puissance extérieure.
- Puissances extérieures d'une application linéaire.
- Déterminants et mineurs.

Actions naturelles sur les espaces de matrices

On dispose d'une action naturelle de $GL_n(K) \times GL_m(K)$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(K)$:

$$(P, Q) \cdot M := PMQ^{-1}.$$

Définition 4.1

Deux matrices d'une même orbite pour cette action sont dites *équivalentes*.

On en déduit une action naturelle de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{M}_n(K)$:

$$P \cdot M := PMP^{-1}.$$

Définition 4.2

Deux matrices d'une même orbite pour cette action sont dites *semblables*.

Actions naturelles et changements de base

Proposition 4.1

Soient $M, N \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Soit $u : K^n \to K^m$ l'application linéaire canoniquement associée à M. Alors N est équivalente à M si et seulement s'il existe des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ respectives de K^n, K^m telles que $N = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$.

Proposition 4.2

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $u : K^n \to K^n$ l'application linéaire canoniquement associée à M. Alors N est semblable à M si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de K^n telle que $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Classification à équivalence près

Proposition 4.3

Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, alors M est équivalente à une unique matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $r \leqslant \min\{m, n\}$. Plus précisément, l'entier r est le rang de M.

Corollaire 4.4

Deux matrices de mêmes dimensions sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Remarque

La classification à similitude près est nettement plus délicate. C'est (entre autres) l'objet de la théorie de la réduction des endomorphismes.

Réduction des endomorphismes : motivations

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- But : écrire $E = \bigoplus E_i$ avec chaque E_i stable par u, et $u_{|E_i}$ d'une nature particulière (ex : homothétie, nilpotent, cyclique...).
- Compréhension plus claire de la façon dont u agit sur les éléments de E.
- Classification : comparer les endomorphismes, décrire les classes de similitude.

Polynômes d'endomorphismes

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Proposition 4.5 (Propriété universelle des K-algèbres)

Soit A une K-algèbre et $a \in A$, il existe un unique morphisme d'algèbres

$$\varepsilon_a \ : \ K[X] \to A$$

tel que $\varepsilon_a(X) = a$.

On note en général $P(a)$ pour $\varepsilon_a(P)$.
On peut considérer $P(u)$. On note $K[u]$ l'image de ε_u.

Sous-espaces stables, endomorphisme induit

Définition 4.3

Soit E un K-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est stable par u si $u(F) \subset F$.

Définition 4.4

Soit $F \subset E$ stable par u. Alors la restriction de u à F induit un endomorphisme $u_F : F \to F$. On l'appelle *endomorphisme induit* par u sur F.

Exemple

- *Si u est une homothétie, tout sous-espace est stable par u.*
- *Si $P \in K[X]$, alors* $\ker P(u)$ *est un sous-espace stable.*

Lemme de décomposition des noyaux

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Lemme 4.6 (de décomposition des noyaux)

Soient $P_1, \dots P_r \in K[X]$ deux à deux premiers entre eux. Soit $P = P_1 \cdots P_r$. Alors :

$$\ker P(u) = \bigoplus \ker P_i(u).$$

En outre, les projecteurs correspondant à cette somme directe sont des éléments de $K[u]$.

Polynômes annulateurs. Polynôme minimal.

Définition 4.5

Un polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$ est un élément $P \in K[X]$ tel que $P(u) = 0$.

Lemme 4.7

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble des polynômes annulateurs de u forme un idéal non nul de $K[X]$.

Corollaire 4.8

Il existe un unique polynôme unitaire de plus petit degré π_u tel que tout polynôme annulateur soit multiple de π_u.

Le polynôme π_u s'appelle *polynôme minimal* de u.

Polynôme caractéristique. Théorème de Cayley-Hamilton.

Définition 4.6

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle *polynôme caractéristique* de u le déterminant

$$\chi_u(X) = \det(u - X.id).$$

Théorème 4.9 (Cayley-Hamilton)

Le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.

Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 4.7

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que $\lambda \in K$ est *valeur propre* de u si $u - \lambda id$ n'est pas injectif. On dit que $x \in E$ est *vecteur propre* associé à la valeur propre λ si $x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$.

Proposition 4.10

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $\lambda \in K$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) λ est valeur propre de u,

(ii) $\chi_u(\lambda) = 0$,

(iii) $\pi_u(\lambda) = 0$.

Si λ est valeur propre de u, on note $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda id)$ le *sous-espace propre* associé à λ.

Endomorphismes diagonalisables

Définition 4.8

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est *diagonalisable* s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.

Théorème 4.11

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable,

(ii) $E = \bigoplus_{\lambda \text{ vp de } u} E_\lambda(u)$,

(iii) u a un polynôme annulateur scindé à racines simples,

(iv) π_u est scindé à racines simples,

(v) χ_u est scindé, s'écrit $\chi_u = \prod_\lambda (X-\lambda)^{m_\lambda}$, et pour toute valeur propre λ de u, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.

Endomorphismes diagonalisables

Exemple

- *Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.*
- *La matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.
- *Si* $\dim E = n > 1$ *et* $u^n = 0$ *avec* $u \neq 0$, *alors* u *n'est pas diagonalisable.*

Endomorphismes nilpotents

Définition 4.9

Soit E un K-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.
L'*indice de nilpotence* de u est le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.

Définition 4.10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le *bloc de Jordan nilpotent* de taille n est la matrice :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$$

Endomorphismes nilpotents : exemples

Exemple

- *J_n est nilpotente d'indice n.*
- *N diagonale par blocs, de blocs diagonaux $J_{n_1}, \ldots, J_{n_r}$, est nilpotente d'indice* $\max_{1 \leqslant i \leqslant r}\{n_i\}$.
- *$E = K[X]_{<n}$, la dérivation est nilpotente d'indice n.*
- *Si λ est racine de χ_u de multiplicité m_λ,* $F = \ker(u - \lambda id)^{m_\lambda}$, *alors $u_F - \lambda id_F$ nilpotent d'indice* $\leqslant m_\lambda$.

Réduction de Jordan pour les nilpotents

Théorème 4.12 (Jordan pour les nilpotents)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent. Alors il existe une unique famille d'entiers $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_r > 0$, et une base $\mathcal{B}$ de E, tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r} \end{pmatrix}$$