AL3

Séance 3 : Applications multilinéaires alternées. Puissances extérieures. Déterminant.

ENS Rennes

16 septembre 2020

Séance précédente

Dualité, produit tensoriel d'espaces vectoriels

- Dualité
- Produit tensoriel : propriété universelle et construction

Applications multilinéaires alternées

Définition 3.1

Soit E, E' des K-espaces vectoriels et $p \in \mathbb{N}$. Une application p-linéaire $f : E^p \to E'$ est dite

- alternée si pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$,

$$x_i = x_j \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

- antisymétrique si pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, et pour toute transposition $\tau = (i\ j) \in \mathfrak{S}_p$,

$$f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(p)}) = -f(x_1, \ldots, x_p).$$

Proposition 3.1

Si f est alternée, alors f est antisymétrique. La réciproque est vraie si K n'est pas de caractéristique 2.

Puissances extérieures : propriété universelle

On suppose dans la suite que K est de caractéristique différente de 2.

Théorème 3.2

Soit E un K-espace vectoriel et soit $p \geqslant 0$. Il existe un K-espace vectoriel $\bigwedge^p E$ et une application

$$\begin{array}{ccc} E^p & \to & \bigwedge^p E \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \end{array}$$

tels que, pour tout K-espace vectoriel E' et pour toute application p-linéaire alternée $f : E^p \to E'$, il existe une unique application linéaire $\tilde{f} : \bigwedge^p E \to E'$ telle que pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, on ait

$$\tilde{f}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = f(x_1, \ldots, x_p).$$

Puissances extérieures : bases

Définition 3.2

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $I \subset \{1, \ldots, n\}$ de cardinal p, on note $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ les élements de p rangés par ordre croissant, et

$$e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \in \bigwedge^p E.$$

Proposition 3.3

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors la famille $(e_I)_{|I|=p}$ est une base de $\bigwedge^p E$.

Puissances extérieures : dimension, base duale

Corollaire 3.4

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $p \in \mathbb{N}$, alors

$$\dim \bigwedge^p E = \binom{n}{p}.$$

Corollaire 3.5

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $p \in \mathbb{N}$. La base duale de la base $(e_I)_{|I|=p}$ de $\bigwedge^p E$ est donnée par la formule :

$$e_I^*(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} e_i^*(x_{\sigma(i)}).$$

Puissances extérieures : exemple de coordonnées

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de K^3,
$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ et $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$.
La famille $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$ est une base de $\bigwedge^2 E$.
Les coordonnées de $x \wedge y$ dans cette base sont :

$$x \wedge y = \begin{pmatrix} x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ x_1 y_3 - x_3 y_1 \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 \end{pmatrix}.$$

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 3.3

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $x_1, \ldots, x_n$ une famille d'éléments de E. On appelle *déterminant* de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ en base $\mathcal{B}$ l'unique scalaire $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ tel que

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n).$$

En d'autre termes, si on note $I = \{1, \ldots, n\}$, on a $\det_{\mathcal{B}} = e_I^*$.

Exemple

Si on note $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ *et* $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$, *on a*

$$x \wedge y = (x_1 y_2 - x_2 y_1)(e_1 \wedge e_2).$$

Puissances extérieures d'une application linéaire

Définition 3.4

Soient E, E' des K-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, E')$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On définit $\bigwedge^p u : \bigwedge^p E \to \bigwedge^p E'$ comme étant l'unique application linéaire vérifiant :

$$\forall x_1, \ldots, x_p \in E, \left(\bigwedge^p u\right)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = u(x_1) \wedge \cdots \wedge u(x_p).$$

Définition 3.5

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *déterminant* de u, noté $\det(u)$, le rapport de l'homothétie $\bigwedge^n u$ de $\bigwedge^n E$ (qui est de dimension 1).

Puissances extérieures et composition

Lemme 3.6

Soient $u : E \to E'$ et $v : E' \to E''$ linéaires, et soit $p \in \mathbb{N}$. Alors

$$\bigwedge^p (v \circ u) = \left(\bigwedge^p v\right) \circ \left(\bigwedge^p u\right).$$

Corollaire 3.7

Soit E de dimension finie n, et soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\det(u \circ v) = \det(u)\det(v).$$

Puissance extérieure et rang

Proposition 3.8

Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$. La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée si et seulement si $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p = 0$.

Corollaire 3.9

Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$, alors u est de rang au plus $p-1$ si et seulement si $\bigwedge^p u = 0$.

Corollaire 3.10

Soit E de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u est un isomorphisme si et seulement si $\det(u) \neq 0$.

Mineurs d'une application linéaire

Définition 3.6

On appelle *mineurs de taille p* d'une matrice M les déterminants des sous-matrices obtenues en extrayant p lignes et colonnes de M.

Proposition 3.11

Soient E, E' de dimension finie munis de bases respectives $(e_i), (f_j)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice M dans ces bases. Alors les coefficients de la matrice $\bigwedge^p u$ dans les bases associées (e_I) et (f_J) sont les mineurs de taille p de M.

Corollaire 3.12

L'application linéaire $u : E \to E'$ est de rang au plus $p-1$ si et seulement si tous les mineurs taille p de sa matrice (dans des bases quelconques de E, E') de sont nuls.

Formule de Binet-Cauchy

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Pour $J \subset \{1, \ldots, m\}$, on note A_J (resp. B_J) la matrice extraite de A (resp. B) en conservant les colonnes (resp. les lignes) dont les indices sont dans J.

Théorème 3.13

On a la formule :

$$\det(AB) = \sum_{|J|=n} \det(A_J)\det(B_J).$$