AL3

Séance 2 : Dualité. Produits tensoriels.

ENS Rennes

9 septembre 2020

Séance précédente

Structures :

- Espace vectoriel, sous-espace vectoriel
- Bases d'un espace vectoriel
- Applications linéaires
- Sommes de sous-espaces
- Quotients d'espaces vectoriels

Espace vectoriel dual

Définition 2.1

Soit E un K-espace vectoriel. On appelle *espace vectoriel dual* de E l'espace des formes linéaires sur E, c'est-à-dire $E^* = \mathcal{L}(E, K)$.

Définition 2.2

Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$, alors il existe un unique ${}^t u \in \mathcal{L}((E')^*, E^*)$ tel que pour tout $\varphi \in E^*$, ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$: c'est le *transposé* de u.

Exemple

Soit $x \in K$. Sur $E = K[X]_{<n}$, $\varphi_x(P) = P(x)$ définit une forme linéaire.
Soit $u(P) = P(X+1)$, alors ${}^t u(\varphi_x)(P) = P(x+1)$, donc ${}^t u(\varphi_x) = \varphi_{x+1}$.

Base duale

Proposition 2.1

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $B = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. Alors il existe une unique base (e_i^*) de E^* telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.

Corollaire 2.2

En dimension finie, $\dim E = \dim E^*$.

Remarque

- *Le résultat est faux en dimension infinie. Par exemple,* $K[X]^* \simeq K^{\mathbb{N}}$.
- *Il n'y a pas d'isomorphisme canonique* $E \simeq E^*$.

Dualité, orthogonalité et dimension

Définition 2.3

Soit $A \subset E$, on appelle *orthogonal* de A (pour la dualité) l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur A :

$$A^0 = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A,\ \varphi(x) = 0\} \subset E^*.$$

Proposition 2.3

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $A \subset E$ et $A^0 \subset E^*$ son orthogonal. Alors

$$\dim \langle A \rangle + \dim A^0 = \dim E.$$

Remarque

Si F est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors F^0 est stable par ${}^t u \in \mathcal{L}(E^*)$.

Bidual

E^{**} s'appelle le *bidual* de E.

Théorème 2.4 (Isomorphisme canonique avec le bidual)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & f_x \end{array} : \left| \begin{array}{ccc} E^* & \to & K \\ \varphi & \mapsto & \varphi(x) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Remarque

Il est souvent utile d'identifier E et E^{**}.
Exemple : base antéduale - interpolation de Lagrange.

Applications bilinéaires

Définition 2.4

Soient E, F, E' des K-espaces vectoriels. Une application $b : E \times F \to E'$ est dite *bilinéaire* si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Exemple

- *Un produit scalaire est une application bilinéaire.*
- *Si E est un K-espace vectoriel, la multiplication scalaire $K \times E \to E$ est bilinéaire.*
- *Si A est une K-algèbre, la multiplication $A \times A \to A$ est bilinéaire (par exemple, $A = K[X]$).*
- *Si $b : E' \times F' \to E''$ est bilinéaire, et $u \in \mathcal{L}(E, E')$, $v \in \mathcal{L}(F, F')$, alors $(x, y) \mapsto b(u(x), v(y))$ est bilinéaire.*

Produit tensoriel

Théorème 2.5 (Propriété universelle du produit tensoriel)

Soient E, F des K-espaces vectoriels.
Il existe un espace vectoriel noté $E \otimes F$, et une application bilinéaire $E \times F \to E \otimes F$, notée $\cdot \otimes \cdot$, tels que :

Pour tout K-espace vectoriel G et toute application bilinéaire

$$b \ : \ E \times F \to G,$$

il existe une unique application linéaire

$$\tilde{b} \ : \ E \otimes F \to G$$

tels que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $\tilde{b}(x \otimes y) = b(x, y)$.

Produit tensoriel : construction (I)

On se fixe E, F des K-espaces vectoriels.

- $K^{(E\times F)}$ a une base indexée par $E \times F$.
- Toute application $E \times F \to K$ définit une application linéaire sur $K^{(E\times F)}$.
- On construit un sous-espace vectoriel T de $K^{(E\times F)}$ de sorte que toute application *bilinéaire* de source $E \times F$ soit nulle sur T.

Produit tensoriel : construction (II)

On va construire un sous-espace vectoriel T de $K^{(E\times F)}$ de sorte que toute application *bilinéaire* soit nulle sur T.
Pour $(x,y),(x',y') \in E \times F$ et $\lambda \in K$, on pose

- $\alpha_{x,y,\lambda} = (\lambda x, y) - \lambda(x,y)$
- $\beta_{x,y,\lambda} = (x, \lambda y) - \lambda(x,y)$
- $\gamma_{x,x',y} = (x+x', y) - (x,y) - (x',y)$
- $\delta_{x,y,y'} = (x, y+y') - (x,y) - (x,y')$,

et

$$T = \text{Vect}\{\alpha_{x,y,\lambda}, \beta_{x,y,\lambda}, \gamma_{x,x',y}, \delta_{x,y,y'} \mid (x,y),(x',y') \in E\times F, \lambda \in K\}.$$

Produit tensoriel : construction (III)

- $E \otimes F := K^{(E \times F)} / T$
- Pour $(x, y) \in E \times F$, $x \otimes y$ désigne l'image de (x, y) par l'application composée :

$$E \times F \to K^{(E \times F)} \to E \otimes F = K^{(E \times F)} / T.$$

- Cette application est bilinéaire.

Preuve de la propriété universelle du produit tensoriel

Soit $b : E \times F \to G$, bilinéaire.

- b définit une application linéaire $B : K^{(E \times F)} \to G$.
- Pour tout $t \in T$, $B(t) = 0$.
- B définit une application linéaire $\tilde{b} : E \otimes F \to G$ qui vérifie $\tilde{b}(x \otimes y) = b(x, y)$.
- $\tilde{b}$ est unique.

Produit tensoriel d'applications linéaires

Proposition 2.6

Soient E, E', F, F' des K-espaces vectoriels. Soient $u : E \to E'$ et $v : F \to F'$ linéaires. Alors il existe une unique application linéaire :

$$u \otimes v \ : \ E \otimes F \to E' \otimes F'$$

telle que pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$(u \otimes v)(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y).$$

Base du produit tensoriel

Proposition 2.7

Soient E, F deux K-espaces vectoriels. Soit $(e_i)_{i\in I}$ (resp. $(f_j)_{j\in J}$) une base de E (resp. de F). Alors

$$\{e_i \otimes f_j \mid (i,j) \in I \times J\}$$

est une base de $E \otimes F$.

Corollaire 2.8

Soient E, F des K-espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\dim(E \otimes F) = \dim E \cdot \dim F.$$

Corollaire 2.9

Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie, alors $(E \otimes F)^* \simeq E^* \otimes F^*$.

Exemple : associativité

Proposition 2.10

Soient E, F, G des K-espaces vectoriels. Il existe un unique isomorphisme de K-espaces vectoriels :

$$\theta \ : \ (E \otimes F) \otimes G \simeq E \otimes (F \otimes G)$$

tel que pour tout $(x, y, z) \in E \times F \times G$,

$$\theta((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z).$$

Exemples de produits tensoriels

- Si X, Y sont des espaces topologiques, $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(Y)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{C}(X \times Y)$. Si X et Y sont compacts, alors $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(Y)$ est dense dans $\mathcal{C}(X \times Y)$.
- (Extension des scalaires) Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u \mapsto id \otimes u$ identifie $\mathcal{L}(E)$ à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E_{\mathbb{C}})$ (les applications linéaires $\ll$ définies sur $\mathbb{R}$ $\gg$).

Matrices et produits tensoriels : exemple

Soit $E = K^2$ muni de sa base canonique, u, v de matrices respectives $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$.
Alors, dans la base $(e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_2)$, $u \otimes v$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} & a_{1,2}b_{1,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,2}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} & a_{2,2}b_{1,2} \\ a_{1,1}b_{2,1} & a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{2,2} & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} & a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1}A & b_{1,2}A \\ b_{2,1}A & b_{2,2}A \end{pmatrix}.$$