AL3

Séance 12 : Théorie des caractères

ENS Rennes

2 décembre 2020

Séance précédente

- Représentations linéaires de groupes
- Morphismes de représentations, sous-représentations
- Représentation duale, produit tensoriel, action sur les applications linéaires
- Théorème de Maschke

Représentations irréductibles

Définition 12.1

Soit V une représentation de G. On dit que V est *irréductible* si les seules sous-représentations de V sont $\{0\}$ et V.

Représentations irréductibles

Définition 12.1

Soit V une représentation de G. On dit que V est *irréductible* si les seules sous-représentations de V sont $\{0\}$ et V.

Exemple

- *Les représentations de dimension* 1 *sont irréductibles.*

Représentations irréductibles

Définition 12.1

Soit V une représentation de G. On dit que V est *irréductible* si les seules sous-représentations de V sont $\{0\}$ et V.

Exemple

- *Les représentations de dimension* 1 *sont irréductibles.*
- *Si G est abélien, ses représentations irréductibles sont de dimension 1.*

Représentations irréductibles

Définition 12.1

Soit V une représentation de G. On dit que V est *irréductible* si les seules sous-représentations de V sont $\{0\}$ et V.

Exemple

- *Les représentations de dimension* 1 *sont irréductibles.*
- *Si G est abélien, ses représentations irréductibles sont de dimension 1.*
- *L'hyperplan $x_1 + \cdots + x_n = 0$ est une sous-représentation de la représentation naturelle $\mathfrak{S}_n \to GL_n(\mathbb{C})$.*

Décomposition en irréductibles

Corollaire 12.1

Soit V une représentation de G, alors V se décompose comme somme directe de sous-représentations irréductibles : il existe $V_1, \ldots, V_r$ sous-représentations irréductibles de V telles que :

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r.$$

Lemme de Schur

On suppose toujours que G est fini, et que les représentations sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Lemme 12.2

Soient V_1, V_2 deux représentations irréductibles de G. Alors :

$$\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } V_1 \not\simeq V_2 \\ \mathbb{C} & \text{si } V_1 \simeq V_2. \end{cases}$$

Unicité de la décomposition en irréductibles

Proposition 12.3

Soit V une représentation de G et W une représentation irréductible de G. Alors $\dim \mathrm{Hom}_G(W, V)$ est le nombre de facteurs isomorphes à W apparaissant dans une décomposition de V en somme de représentations irréductibles.

Unicité de la décomposition en irréductibles

Proposition 12.3

Soit V une représentation de G et W une représentation irréductible de G. Alors $\dim \mathrm{Hom}_G(W, V)$ est le nombre de facteurs isomorphes à W apparaissant dans une décomposition de V en somme de représentations irréductibles.

Définition 12.2

L'entier $\dim \mathrm{Hom}_G(V, W)$ s'appelle la *multiplicité* de W dans V. On la note $\mu_{W,V}$ (ou μ_W quand il n'y a pas de confusion possible).

Corollaire 12.4

Soit V une représentation de G, on a :

$$V \simeq \bigoplus_{W \text{ irréductible}} W^{\oplus \mu_{W,V}}.$$

Exemple : le groupe diédral

Le groupe diédral D_n est engendré par r, s où r est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s est la réflexion d'axe horizontal, on a $srs = r^{-1}$. Soit V une représentation irréductible de D_n, on note $R = \rho(r)$ et $S = \rho(s)$.

Exemple : le groupe diédral

Le groupe diédral D_n est engendré par r, s où r est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s est la réflexion d'axe horizontal, on a $srs = r^{-1}$.
Soit V une représentation irréductible de D_n, on note $R = \rho(r)$ et $S = \rho(s)$.
Soit $x \in V$ vecteur propre pour R associé à la valeur propre ω : $Rx = \omega x$ avec $\omega^n = 1$.

Exemple : le groupe diédral

Le groupe diédral D_n est engendré par r, s où r est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s est la réflexion d'axe horizontal, on a $srs = r^{-1}$.
Soit V une représentation irréductible de D_n, on note $R = \rho(r)$ et $S = \rho(s)$.
Soit $x \in V$ vecteur propre pour R associé à la valeur propre ω : $Rx = \omega x$ avec $\omega^n = 1$.
Alors $R(Sx) = \omega^{-1} Sx$ donc $\langle x, Sx \rangle$ est une sous-rep., donc $V = \langle x, Sx \rangle$.

Exemple : le groupe diédral

Le groupe diédral D_n est engendré par r, s où r est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s est la réflexion d'axe horizontal, on a $srs = r^{-1}$.
Soit V une représentation irréductible de D_n, on note $R = \rho(r)$ et $S = \rho(s)$.
Soit $x \in V$ vecteur propre pour R associé à la valeur propre ω : $Rx = \omega x$ avec $\omega^n = 1$.
Alors $R(Sx) = \omega^{-1} Sx$ donc $\langle x, Sx \rangle$ est une sous-rep., donc $V = \langle x, Sx \rangle$.
Si deg $V = 1$ alors $Sx = \pm x$, et alors $\omega^2 = 1$ ($\omega = 1$ si n impair, $\omega = \pm 1$ si n pair).

Exemple : le groupe diédral

Le groupe diédral D_n est engendré par r, s où r est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s est la réflexion d'axe horizontal, on a $srs = r^{-1}$.
Soit V une représentation irréductible de D_n, on note $R = \rho(r)$ et $S = \rho(s)$.
Soit $x \in V$ vecteur propre pour R associé à la valeur propre ω : $Rx = \omega x$ avec $\omega^n = 1$.
Alors $R(Sx) = \omega^{-1} Sx$ donc $\langle x, Sx \rangle$ est une sous-rep., donc $V = \langle x, Sx \rangle$.
Si deg $V = 1$ alors $Sx = \pm x$, et alors $\omega^2 = 1$ ($\omega = 1$ si n impair, $\omega = \pm 1$ si n pair).
Si deg $V = 2$ alors $\omega \notin \{\pm 1\}$ et dans la base $\langle x, Sx \rangle$:

$$R = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Caractère d'une représentation

Définition 12.3

Soit (V, ρ) une K-représentation de degré fini de G. On appelle *caractère* de la représentation V l'application :

$$\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & K \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{array}.$$

Caractère d'une représentation

Définition 12.3

Soit (V, ρ) une K-représentation de degré fini de G. On appelle *caractère* de la représentation V l'application :

$$\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & K \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{array}.$$

Remarque

- *Si* $V \simeq V'$, *alors* $\chi_V = \chi_{V'}$.

Caractère d'une représentation

Définition 12.3

Soit (V, ρ) une K-représentation de degré fini de G. On appelle *caractère* de la représentation V l'application :

$$\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & K \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{array}.$$

Remarque

- *Si* $V \simeq V'$, *alors* $\chi_V = \chi_{V'}$.
- $\chi_V(1) = \deg V$.

Caractère d'une représentation

Définition 12.3

Soit (V, ρ) une K-représentation de degré fini de G. On appelle *caractère* de la représentation V l'application :

$$\chi_V : \begin{array}{ccc} G & \to & K \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{array}.$$

Remarque

- *Si* $V \simeq V'$, *alors* $\chi_V = \chi_{V'}$.
- $\chi_V(1) = \deg V$.
- *Si* $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$ *alors* $\chi_V = \sum_{i=1}^{r} \chi_{V_i}$.

Caractères : exemples

- Si $\deg V = 1$, $\chi_V = \rho$.

Caractères : exemples

- Si deg $V = 1$, $\chi_V = \rho$.
- $\chi_{V/W} + \chi_W = \chi_V$

Caractères : exemples

- Si deg $V = 1$, $\chi_V = \rho$.
- $\chi_{V/W} + \chi_W = \chi_V$
- $\chi_{V \otimes V'} = \chi_V \cdot \chi_{V'}$

Caractères : exemples

- Si $\deg V = 1$, $\chi_V = \rho$.
- $\chi_{V/W} + \chi_W = \chi_V$
- $\chi_{V \otimes V'} = \chi_V \cdot \chi_{V'}$
- $\chi_{\kappa[G]}(g) = \begin{cases} \#G & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Caractères : exemples

- Si deg $V = 1$, $\chi_V = \rho$.
- $\chi_{V/W} + \chi_W = \chi_V$
- $\chi_{V \otimes V'} = \chi_V \cdot \chi_{V'}$
- $\chi_{K[G]}(g) = \begin{cases} \#G & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Pour V rep. irréductible de degré 2 de D_n :

$$\chi_V(r) = 2\Re(\omega), \chi_V(s) = 0.$$

Caractères : exemples

- Si $\deg V = 1$, $\chi_V = \rho$.
- $\chi_{V/W} + \chi_W = \chi_V$
- $\chi_{V \otimes V'} = \chi_V \cdot \chi_{V'}$
- $\chi_{K[G]}(g) = \begin{cases} \#G & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Pour V rep. irréductible de degré 2 de D_n :

$$\chi_V(r) = 2\Re(\omega), \chi_V(s) = 0.$$

- Si $K = \mathbb{C}$, $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$

Caractères : exemples

- Si deg $V = 1$, $\chi_V = \rho$.
- $\chi_{V/W} + \chi_W = \chi_V$
- $\chi_{V \otimes V'} = \chi_V \cdot \chi_{V'}$
- $\chi_{K[G]}(g) = \begin{cases} \#G & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Pour V rep. irréductible de degré 2 de D_n :

$$\chi_V(r) = 2\Re(\omega), \chi_V(s) = 0.$$

- Si $K = \mathbb{C}$, $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$
- Si $K = \mathbb{C}$, $\chi_{\mathcal{L}(V,V')} = \overline{\chi_V}\chi_{V'}$.

Caractères irréductibles

On suppose désormais que G est fini, $K = \mathbb{C}$, et que les représentations sont de degré fini.

Remarque

Soit V une représentation de G. Alors

$$\chi_V = \sum_{W \text{ irréductible}} \mu_{W,V} \chi_W.$$

Caractères irréductibles

On suppose désormais que G est fini, $K = \mathbb{C}$, et que les représentations sont de degré fini.

Remarque

Soit V une représentation de G. Alors

$$\chi_V = \sum_{W \text{ irréductible}} \mu_{W,V} \chi_W.$$

Question : peut-on retrouver les $\mu_{W,V}$ à partir de la seule donnée de χ_V ?

Caractères irréductibles

On suppose désormais que G est fini, $K = \mathbb{C}$, et que les représentations sont de degré fini.

Remarque

Soit V une représentation de G. Alors

$$\chi_V = \sum_{W \text{ irréductible}} \mu_{W,V} \chi_W.$$

Question : peut-on retrouver les $\mu_{W,V}$ à partir de la seule donnée de χ_V ?

Définition 12.4

Soit $\chi : G \to \mathbb{C}$, on dit que χ est un *caractère irréductible* s'il existe une représentation irréductible V telle que $\chi = \chi_V$.

Projection sur le sous-espace des points fixes

Lemme 12.5

Soit V une représentation de G, et soit $V^G = \{x \in V \mid \forall g \in G, gx = x\}$ l'ensemble des points fixes de l'action de G sur V. Alors l'application

$$p : \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ x & \mapsto & \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} gx \end{array}$$

est un projecteur sur V^G.

Projection sur le sous-espace des points fixes

Lemme 12.5

Soit V une représentation de G, et soit $V^G = \{x \in V \mid \forall g \in G, gx = x\}$ l'ensemble des points fixes de l'action de G sur V. Alors l'application

$$p : \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ x & \mapsto & \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} gx \end{array}$$

est un projecteur sur V^G.

Corollaire 12.6

Soit V une représentation de G, alors $\dim V^G = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi(g)$.

Projection sur le sous-espace des points fixes

Lemme 12.5

Soit V une représentation de G, et soit $V^G = \{x \in V \mid \forall g \in G, gx = x\}$ l'ensemble des points fixes de l'action de G sur V. Alors l'application

$$p : \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ x & \mapsto & \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} gx \end{array}$$

est un projecteur sur V^G.

Corollaire 12.6

Soit V une représentation de G, alors $\dim V^G = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi(g)$.

Exemple

Si $V = \mathbb{C}[G]$, $V^G = Vect(\sum_{g \in G} e_g)$.

Un calcul de dimension avec des caractères

On munit l'espace des fonctions $f : G \to \mathbb{C}$ du produit scalaire :

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}.$$

Lemme 12.7

Soient V_1, V_2 des représentations de G. On munit $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ de sa structure naturelle de représentation de G. Alors :

$$\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \mathcal{L}(V_1, V_2)^G.$$

Un calcul de dimension avec des caractères

On munit l'espace des fonctions $f : G \to \mathbb{C}$ du produit scalaire :

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}.$$

Lemme 12.7

Soient V_1, V_2 des représentations de G. On munit $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ de sa structure naturelle de représentation de G. Alors :

$$\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \mathcal{L}(V_1, V_2)^G.$$

Proposition 12.8

Soient V_1, V_2 des représentations de G, alors :

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \langle \chi_{V_1} | \chi_{V_2} \rangle .$$

Orthogonalité des caractères irréductibles

Corollaire 12.9

Les caractères irréductibles de G forment une famille orthonormée.

Orthogonalité des caractères irréductibles

Corollaire 12.9

Les caractères irréductibles de G forment une famille orthonormée.

Remarque

Si $V \simeq \bigoplus_{W \text{ irréductible}} W^{\mu_W}$, *alors :*

$$\langle \chi_V | \chi_V \rangle = \sum_{W \text{ irréductible}} \mu_W^2.$$

Orthogonalité des caractères irréductibles

Corollaire 12.9

Les caractères irréductibles de G forment une famille orthonormée.

Remarque

Si $V \simeq \bigoplus_{W \text{ irréductible}} W^{\mu_W}$, *alors :*

$$\langle \chi_V | \chi_V \rangle = \sum_{W \text{ irréductible}} \mu_W^2.$$

Corollaire 12.10

Soit V une représentation de G, alors V est irréductible si et seulement si $\langle \chi_V | \chi_V \rangle = 1$.

Applications à la représentation régulière

Soit G un groupe fini, et $V = \mathbb{C}[G]$ sa représentation régulière.

Proposition 12.11

Soit W une représentation irréductible de G, alors $\langle \chi_W, \chi_V \rangle = \deg W$.

Corollaire 12.12

$$V \simeq \bigoplus_{W \text{ irréductible}} W^{\oplus \deg W}.$$

Corollaire 12.13

$$\#G = \sum_{W \text{ irréductible}} (\deg W)^2.$$

Fonctions centrales

Définition 12.5

Soit G un groupe, on appelle *fonction centrale* sur G toute application $f : G \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall g, h \in G,\ f(ghg^{-1}) = f(h).$$

Fonctions centrales

Définition 12.5

Soit G un groupe, on appelle *fonction centrale* sur G toute application $f : G \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall g, h \in G,\ f(ghg^{-1}) = f(h).$$

Exemple

- *Les indicatrices de classes de conjugaison sont des fonctions centrales.*

Fonctions centrales

Définition 12.5

Soit G un groupe, on appelle *fonction centrale* sur G toute application $f : G \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall g, h \in G,\ f(ghg^{-1}) = f(h).$$

Exemple

- *Les indicatrices de classes de conjugaison sont des fonctions centrales.*
- *Les caractères de représentations sont des fonctions centrales.*

Caractères et fonctions centrales

Proposition 12.14

Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales.

Caractères et fonctions centrales

Proposition 12.14

Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales.

Lemme 12.15

Soit f une fonction centrale sur G et V une représentation de G. Alors la fonction

$$f_V : \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ x & \mapsto & \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} f(g)gx \end{array}$$

est G-équivariante. En particulier, si V est irréductible de degré d, f_V est une homothétie de rapport $\frac{1}{d}\langle \bar{f}|\chi_V\rangle$.

Caractères et fonctions centrales

Proposition 12.14

Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales.

Lemme 12.15

Soit f une fonction centrale sur G et V une représentation de G. Alors la fonction

$$f_V : \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ x & \mapsto & \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} f(g)gx \end{array}$$

est G-équivariante. En particulier, si V est irréductible de degré d, f_V est une homothétie de rapport $\frac{1}{d}\langle \bar{f}|\chi_V\rangle$.

Corollaire 12.16

Le nombre de classes de conjugaison de G est égal au nombre de représentations irréductibles de G (à isomorphisme près).

Table de caractères

On peut présenter la liste des caractères irréductibles d'un groupe dans un tableau carré de taille égale à son nombre de classes de conjugaison.
Les lignes correspondent aux caractères irréductibles de G et les colonnes aux classes de conjugaison.
Le coefficient correspondant au caractère χ et à la classe de conjugaison C est $\chi(g)$, où $g \in C$.

Table de caractères

On peut présenter la liste des caractères irréductibles d'un groupe dans un tableau carré de taille égale à son nombre de classes de conjugaison.
Les lignes correspondent aux caractères irréductibles de G et les colonnes aux classes de conjugaison.
Le coefficient correspondant au caractère χ et à la classe de conjugaison C est $\chi(g)$, où $g \in C$.

Exemple

$G = D_n$ *(n impair) :*

	id (1)	$\{r^k, r^{-k}\}$ (2, $\frac{n-1}{2}$ *classes*)	C_s (n)
χ_1	1	1	1
χ_{-1}	1	1	-1
χ_ω ($\frac{n-1}{2}$ *caractères*)	1	$2\Re(\omega^k)$	0