AL3

Séance 11 : Représentations linéaires des groupes finis

ENS Rennes

25 novembre 2020

Séance précédente

- Réduction des endomorphismes normaux
- Décomposition polaire.

Représentations de groupes

Soit K un corps et G un groupe.

Définition 11.1

On appelle *représentation linéaire* de G la donnée d'un couple (V, ρ), où V est un K-espace vectoriel et

$$\rho \ : \ G \to GL(V)$$

est un morphisme de groupes.

Représentations de groupes

Soit K un corps et G un groupe.

Définition 11.1

On appelle *représentation linéaire* de G la donnée d'un couple (V, ρ), où V est un K-espace vectoriel et

$$\rho \ : \ G \to GL(V)$$

est un morphisme de groupes.

Remarque

Une représentation de G est une action de G par applications linéaires : pour chaque $g \in G$, on se donne un endomorphisme $\rho(g) : V \to V$. On note souvent $g \cdot x$ pour $\rho(g)(x)$.

Représentations de groupes

Soit K un corps et G un groupe.

Définition 11.1

On appelle *représentation linéaire* de G la donnée d'un couple (V, ρ), où V est un K-espace vectoriel et

$$\rho \ : \ G \to GL(V)$$

est un morphisme de groupes.

Remarque

Une représentation de G est une action de G par applications linéaires : pour chaque $g \in G$, on se donne un endomorphisme $\rho(g) : V \to V$. On note souvent $g \cdot x$ pour $\rho(g)(x)$.

Définition 11.2

Soit (V, ρ) une représentation de G. Si V est de dimension finie, alors dim V s'appelle le *degré* de la représentation.

Représentations : exemples

- Représentation triviale : $V = K$, $\rho(g) = 1$.

Représentations : exemples

- Représentation triviale : $V = K$, $\rho(g) = 1$.
- $G = GL(V)$, $\rho = id$.

Représentations : exemples

- Représentation triviale : $V = K$, $\rho(g) = 1$.
- $G = GL(V)$, $\rho = id$.
- Une représentation de degré 1 de G est un morphisme $G \to K^\times$.

Représentations : exemples

- Représentation triviale : $V = K$, $\rho(g) = 1$.
- $G = GL(V)$, $\rho = id$.
- Une représentation de degré 1 de G est un morphisme $G \to K^\times$.
- $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $V = K$, $\rho(\bar{k}) = \omega^k$ où $\omega^n = 1$.

Représentations : exemples

- Représentation triviale : $V = K$, $\rho(g) = 1$.
- $G = GL(V)$, $\rho = id$.
- Une représentation de degré 1 de G est un morphisme $G \to K^\times$.
- $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $V = K$, $\rho(\bar{k}) = \omega^k$ où $\omega^n = 1$.
- Si (V, ρ) est une représentation de G, et H est un sous-groupe de G, $(V, \rho_{|H})$ est une représentation de H.

Représentations : exemples

- Représentation triviale : $V = K$, $\rho(g) = 1$.
- $G = GL(V)$, $\rho = id$.
- Une représentation de degré 1 de G est un morphisme $G \to K^\times$.
- $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $V = K$, $\rho(\bar{k}) = \omega^k$ où $\omega^n = 1$.
- Si (V, ρ) est une représentation de G, et H est un sous-groupe de G, $(V, \rho_{|H})$ est une représentation de H.
- $V = K[G]$: espace vectoriel dont une base est indexée par G :

$$K[G] = \bigoplus_{g \in G} K e_g,$$

avec l'action $\rho(g)(e_h) = e_{gh}$.

Représentations : exemples

- Représentation triviale : $V = K$, $\rho(g) = 1$.
- $G = GL(V)$, $\rho = id$.
- Une représentation de degré 1 de G est un morphisme $G \to K^\times$.
- $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $V = K$, $\rho(\bar{k}) = \omega^k$ où $\omega^n = 1$.
- Si (V, ρ) est une représentation de G, et H est un sous-groupe de G, $(V, \rho_{|H})$ est une représentation de H.
- $V = K[G]$: espace vectoriel dont une base est indexée par G :

$$K[G] = \bigoplus_{g \in G} K e_g,$$

  avec l'action $\rho(g)(e_h) = e_{gh}$.
- Plus généralement, si G agit sur X, on peut définir une représentation $G \to GL(K^{(X)})$.

Morphismes de représentations

Définition 11.3

Soient (V_1, ρ_1), (V_2, ρ_2) des représentations de G. On appelle *morphisme de représentations* de V_1 vers V_2 une application linéaire $f : V_1 \to V_2$ telle que

$$\forall g \in G,\ f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f.$$

On dit aussi que f est G-équivariant.

Morphismes de représentations

Définition 11.3

Soient (V_1, ρ_1), (V_2, ρ_2) des représentations de G. On appelle *morphisme de représentations* de V_1 vers V_2 une application linéaire $f : V_1 \to V_2$ telle que

$$\forall g \in G,\ f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f.$$

On dit aussi que f est G-équivariant. On note $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ l'ensemble des morphismes de représentations de V_1 vers V_2.

Morphismes de représentations

Définition 11.3

Soient (V_1, ρ_1), (V_2, ρ_2) des représentations de G. On appelle *morphisme de représentations* de V_1 vers V_2 une application linéaire $f : V_1 \to V_2$ telle que

$$\forall g \in G,\ f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f.$$

On dit aussi que f est G-équivariant. On note $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ l'ensemble des morphismes de représentations de V_1 vers V_2.
On définit aussi la notion d'endomorphisme, d'isomorphisme, d'automorphisme de représentations.

Morphismes de représentations : exemples

- Les homothéties sont des morphismes de représentations.

Morphismes de représentations : exemples

- Les homothéties sont des morphismes de représentations.
- Soit $f \in GL(V)$, et $\tilde{\rho} : G \to GL(V)$ défini par

$$\tilde{\rho}(g) = f\rho(g)f^{-1},$$

alors $(V, \tilde{\rho})$ est une représentation et f est un isomorphisme de (V, ρ) vers $(V, \tilde{\rho})$.

Morphismes de représentations : exemples

- Les homothéties sont des morphismes de représentations.
- Soit $f \in GL(V)$, et $\tilde{\rho} : G \to GL(V)$ défini par

$$\tilde{\rho}(g) = f\rho(g)f^{-1},$$

alors $(V, \tilde{\rho})$ est une représentation et f est un isomorphisme de (V, ρ) vers $(V, \tilde{\rho})$.

- (V, ρ) représentation de G, $x \in V$, $f : K[G] \to V$ défini par

$$f(e_g) = \rho(g)(x) = g \cdot x$$

est G-équivariant.

Sous-représentations

Définition 11.4

Soit (V, ρ) une représentation de G. On appelle *sous-représentation* de V la donnée d'un sous-espace vectoriel $W \subset V$ tel que

$$\forall g \in G,\ \rho(g)(W) \subset W.$$

Sous-représentations

Définition 11.4

Soit (V, ρ) une représentation de G. On appelle *sous-représentation* de V la donnée d'un sous-espace vectoriel $W \subset V$ tel que

$$\forall g \in G,\ \rho(g)(W) \subset W.$$

Dans ce cas, pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ induit un $\tilde{\rho}(g) \in GL(W)$ et $(W, \tilde{\rho})$ est une représentation de G.

Exemples

- $\{0\}$ et V sont des sous-représentations de V.

Exemples

- $\{0\}$ et V sont des sous-représentations de V.
- G abélien, $V = \mathbb{C}^n$: les $\rho(g)$ ont une droite stable commune donc V contient une sous-représentation de dimension 1.

Exemples

- $\{0\}$ et V sont des sous-représentations de V.
- G abélien, $V = \mathbb{C}^n$: les $\rho(g)$ ont une droite stable commune donc V contient une sous-représentation de dimension 1.
- Si $f : V_1 \to V_2$ est G-équivariant, alors $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont des sous-représentations.

Exemples

- $\{0\}$ et V sont des sous-représentations de V.
- G abélien, $V = \mathbb{C}^n$: les $\rho(g)$ ont une droite stable commune donc V contient une sous-représentation de dimension 1.
- Si $f : V_1 \to V_2$ est G-équivariant, alors $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont des sous-représentations.
- Si G agit sur X, la représentation $\rho : G \to GL(K^{(X)})$ définie par

$$\rho(g)(e_x) = e_{g \cdot x}$$

contient comme sous-représentation le sous-espace $W = \mathrm{Vect}\{e_\omega \mid \omega \in \Omega\}$, où Ω est une orbite (ou une réunion d'orbites).

Quotient par une sous-représentation

Proposition 11.1

Soit V une représentation de G et W une sous-représentation, alors V/W est muni d'une structure naturelle de représentation de G par :

$$g \cdot \pi(x) = \pi(g \cdot x),$$

où $\pi : V \to V/W$ est la surjection canonique. De plus, π est G-équivariant.

Sommes de sous-représentations

Définition 11.5

Soit V une représentation de G, on dit que V est somme directe des sous-représentations $W_1, \ldots, W_r$ si pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, W_i est une sous-représentation de V et $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$.

Sommes de sous-représentations

Définition 11.5

Soit V une représentation de G, on dit que V est somme directe des sous-représentations $W_1, \ldots, W_r$ si pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, W_i est une sous-représentation de V et $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$.

Exemple

Soient $V_1, \ldots, V_r$ des représentations de G, alors $V = V_1 \times \cdots \times V_r$, muni de l'action :

$$g(x_1, \cdots, x_r) = gx_1 + \cdots + gx_r$$

est somme directe des sous-représentations $W_i = f_i(V_i)$ où $f_i(x_i) = (0, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0)$.

Représentation duale, produit tensoriel

Proposition 11.2

Soit V une représentation de G, alors V^* est muni d'une structure naturelle de représentation par :

$$g \cdot \varphi(x) = \varphi(g^{-1}x),$$

c'est-à-dire $\rho^*(g) = {}^t(\rho(g^{-1}))$.

Représentation duale, produit tensoriel

Proposition 11.2

Soit V une représentation de G, alors V^* est muni d'une structure naturelle de représentation par :

$$g \cdot \varphi(x) = \varphi(g^{-1}x),$$

c'est-à-dire $\rho^*(g) = {}^t(\rho(g^{-1}))$.

Proposition 11.3

Soient V_1, V_2 des représentations de G, alors $V_1 \otimes V_2$ est muni d'une structure naturelle de représentation de G par :

$$g \cdot (x_1 \otimes x_2) = (gx_1) \otimes (gx_2),$$

c'est-à-dire $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$.

Action sur les homomorphismes

Proposition 11.4

Soient V_1, V_2 des représentations de G, alors $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ est muni d'une structure naturelle de représentation de G par :

$$g \cdot u(x) = gu(g^{-1}x)$$

Action sur les homomorphismes

Proposition 11.4

Soient V_1, V_2 des représentations de G, alors $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ est muni d'une structure naturelle de représentation de G par :

$$g \cdot u(x) = gu(g^{-1}x)$$

Proposition 11.5

Soient V_1, V_2 deux représentations de dimension finie de G. Alors l'isomorphisme naturel :

$$V_1^* \otimes V_2 \simeq \mathcal{L}(V_1, V_2)$$

induit un isomorphisme entre les représentations correspondantes.

Théorème de Maschke

Dans ce qui suit, le groupe G est supposé fini, et les représentations sont supposées de degré fini. On suppose de plus que le corps de base est $\mathbb{C}$.

Lemme 11.6

Soit $f : V_1 \to V_2$ une application linéaire. Alors l'application linéaire f_G définie par :

$$f_G(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} gf(g^{-1}x)$$

est G-équivariante.

Théorème de Maschke

Dans ce qui suit, le groupe G est supposé fini, et les représentations sont supposées de degré fini. On suppose de plus que le corps de base est $\mathbb{C}$.

Lemme 11.6

Soit $f : V_1 \to V_2$ une application linéaire. Alors l'application linéaire f_G définie par :

$$f_G(x) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} gf(g^{-1}x)$$

est G-équivariante.

Théorème 11.7 (Maschke)

Soit V une représentation de G. Soit $W \subset V$ une sous-représentation. Alors il existe une sous-représentation $W' \subset V$ telle que

$$V = W \oplus W'.$$

Exemple : groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Alors :

- toute représentation de G est somme directe de sous-représentations de degré 1
- les représentations de degré 1 sont les $\rho_\omega : k \mapsto \omega^k$ où ω est racine n-ème de l'unité
- on a $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \simeq \bigoplus_{\omega^n=1} \rho_\omega$