AL3

Séance 10 : Réduction des normaux. Théorème spectral, décomposition polaire.

ENS Rennes

18 novembre 2020

Séance précédente

- Adjoint dans les espaces quadratiques
- Espaces euclidiens et hermitiens
- Adjoint, endomorphismes normaux

Réduction des endomorphismes normaux sur $\mathbb{C}$

Lemme 10.1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.
En outre, si u est normal, et $F = \ker P(u)$ pour un $P \in K[X]$, alors $F^\perp$ est stable par u.

Théorème 10.2

Soit E un espace hermitien, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est normal si et seulement si u est diagonalisable en base orthonormée.

Réduction des endomorphismes normaux sur $\mathbb{R}$

Lemme 10.3

Soit E un espace euclidien de dimension 2, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est normal et n'a pas de valeurs propres réelles. Alors dans toute base orthonormée, la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ (matrice de similitude).

Théorème 10.4

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs étant de tailles 1 ou 2, les blocs de taille 2 étant des matrices de similitude.

Théorème spectral

Corollaire 10.5

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u est symétrique si et seulement si u est diagonalisable en base orthonormée.

Décomposition polaire

Remarque

Soit E hermitien et $s \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Alors pour tout $x \in E$, $\langle x, s(x) \rangle \in \mathbb{R}$.

Décomposition polaire

Remarque

Soit E hermitien et $s \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Alors pour tout $x \in E$, $\langle x, s(x)\rangle \in \mathbb{R}$.

Définition 10.1

On dit que u est positif (resp. défini positif) si pour tout $x \in E$, $\langle x, s(x)\rangle \geqslant 0$ (resp. pour tout $x \in E$ non nul, $\langle x, s(x)\rangle > 0$).

Théorème 10.6

Soit E un espace hermitien ou euclidien. Alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} S^{++}(E) \times U(E) & \to & GL(E) \\ (s, o) & \mapsto & so \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Applications

Corollaire 10.7

Soit E un espace euclidien. Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ contenant $O(E)$, alors $G = O(E)$.

Applications

Corollaire 10.7

Soit E un espace euclidien. Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ contenant $O(E)$, alors $G = O(E)$.

Corollaire 10.8

Deux matrices réelles sont orthogonalement semblables si et seulement si elles sont unitairement semblables.

Corollaire 10.9

Soit E un espace euclidien. L'enveloppe convexe de $O(E)$ est la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ (pour la norme subordonnée à la norme euclidienne).