AL3

Séance 1 : Espaces vectoriels et applications linéaires

ENS Rennes

2 septembre 2020

Notations

Notations (liste non exhaustive) :

- K : un corps (commutatif)
- E : un K-espace vectoriel
- $\mathcal{L}(E, E')$: les applications K-linéaires de E vers E'
- $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$: les endomorphismes de E
- $GL(E) = \mathcal{L}(E)^\times$: les automorphismes de E
- $E^* = \mathcal{L}(E, K)$: le dual de E.

Espace vectoriel

Définition 1.1

Un *espace vectoriel* sur K (ou K-espace vectoriel) est la donnée d'un triplet $(E, +, \cdot)$ où :

- $(E, +)$ est un groupe abélien ;
- $\cdot : K \times E \to E$ est une application telle que pour tous $\lambda, \mu \in K$, $x, y \in E$:
  - $1 \cdot x = x$
  - $\lambda\mu \cdot x = \lambda(\mu \cdot x)$
  - $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
  - $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

Remarque

Le 2ème point équivaut à la donnée d'un morphisme d'anneaux $K \to End_{gr}(E)$.

Espaces vectoriels : exemples

Les ensembles suivants possèdent une structure naturelle d'espace vectoriel :

- K
- Si $n \in \mathbb{N}$, K^n est un K-espace vectoriel
- $K^{\mathbb{N}}$ est un K-espace vectoriel
- $K[X] = K^{(\mathbb{N})}$ est un K-espace vectoriel
- Si X est un ensemble, $K^X = \mathcal{F}(X, K)$ et $K^{(X)} = \mathcal{F}_0(X, K)$ sont des K-espaces vectoriels
- Si E est un K-espace vectoriel et X un ensemble, E^X et $E^{(X)}$ sont des K-espaces vectoriels
- Si X est un espace topologique, $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2

Soit E un K-espace vectoriel, et soit $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$ stable par la multiplication externe.

Proposition 1.1

Soit E un K-espace vectoriel et $F \subset E$, alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- $0 \in F$
- $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in K, \lambda x + y \in F$.

Familles libres, génératrices, bases

Définition 1.3

Soit E un K-espace vectoriel. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite

- *libre* si toute combinaison linéaire nulle des x_i a tous ses coefficients nuls ;
- *génératrice* si tout élément de E est combinaison linéaire des x_i ;
- une *base* si elle est libre et génératrice.

Exemple

E est une famille génératrice, $\emptyset$ est une famille libre.

Définition 1.4

Soit $H \subset E$. Le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant H est bien défini : c'est l'intersection de tous les sous-espaces de E contenant H. On le note $\langle H \rangle$ ou $\mathrm{Vect}(H)$.

Existence de bases, dimension

Lemme 1.2

Soit E un K-espace vectoriel. On suppose que E admet une famille génératrice finie de cardinal n. Alors toute famille libre de E est finie de cardinal $\leqslant n$.

Théorème 1.3

Soit E un K-espace vectoriel. Soient L une famille libre et G une famille génératrice de E telles que $L \subset G$. Alors il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G$.

Proposition 1.4

Toutes les bases de E ont le même cardinal. Ce cardinal s'appelle *dimension* de E.

Exemple : espace vectoriel libre sur un ensemble

Soit X un ensemble et $E = K^{(X)}$ l'ensemble des fonctions $f : X \to K$ à support fini.

Proposition 1.5

L'application

$$\begin{array}{ccc} X & \to & K^{(X)} \\ x & \mapsto & \mathbf{1}_{\{x\}} \end{array}$$

induit une bijection de X sur une base de E.

L'espace E est appelé K-espace vectoriel libre sur X. Par abus de langage, on dira parfois que X est une base de E.

Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition 1.5

Soient $E_1, \ldots, E_r \subset E$ des sous-espaces vectoriels. On considère l'application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r & \to & E \\ (x_1, \ldots, x_r) & \mapsto & x_1 + \cdots + x_r \end{array}$$

On appelle *somme* des E_i, notée $\sum_{i=1}^{r} E_i$, l'image de cette application. Si elle est injective, on dit que la somme est *directe* et on la note $\bigoplus_{i=1}^{r} E_i$.

Exemple

Si $E_1, E_2 \subset E$ sont des sous-espaces tels que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, alors ils sont en somme directe.

Applications linéaires

Définition 1.6

Soient E, E' des K-espaces vectoriels, une application $u : E \to E'$ est dite *linéaire* si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in K,\ u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y).$$

Notation

- $\mathcal{L}(E, E')$ *désigne l'ensemble des application linéaires de E vers E'.*
- $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ *désigne l'ensemble des endomorphismes de E.*
- $GL(E) = \mathcal{L}(E, E)^\times$ *désigne l'ensemble des endomorphismes bijectifs de E.*

Applications linéaires : exemples

- $E = K^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$, alors

$$\pi_i \ : \ \left| \begin{array}{ccc} E & \to & K \\ (x_1, \ldots, x_n) & \to & x_i \end{array} \right.$$

  est linéaire : projection sur la i-ème composante.
- Plus généralement, $\pi_i : E_1 \times \cdots \times E_r \to E_i$ est linéaire.
- $\frac{d}{dX} : K[X] \to K[X]$

Applications linéaires : noyau et image

Définition 1.7

Soit $u : E \to E'$ une application linéaire. On note :

$$\ker u = \{x \in E \mid u(x) = 0\}$$

$$\text{Im } u = \{y \in E' \text{ tels que } \exists x \in E,\ y = u(x)\}$$

Proposition 1.6

Soit $u : E \to E'$ une application linéaire. Alors $\ker u$ et $\text{Im } u$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E et E'.

Définition 1.8

Le *rang* de u est la dimension de son image, notée $\text{rg } u$.

Applications linéaires et bases

Théorème 1.7

Soit E un K-espace vectoriel et soit $B = (e_i)_{i \in I}$ une base de E. Soit E' un K-espace vectoriel et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E'. Alors il existe une unique application linéaire $u : E \to E'$ telle que pour tout $i \in I$, $u(e_i) = x_i$.

Exemple

$$\exists! u \ : \ \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \text{ linéaire tel que } \forall k, u(X^k) = \frac{1}{k+1}$$

(c'est $P \mapsto \int_0^1 P(t)dt$*).*

Espace vectoriel quotient

Définition 1.9

Soit E un K-espace vectoriel. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. On définit une relation d'équivalence sur E par

$$x \sim y \text{ si } x - y \in F.$$

On note E/F l'ensemble quotient de E par cette relation d'équivalence, et $\pi : E \to E/F$ la projection canonique.

Espace vectoriel quotient

Théorème 1.8 (Propriété universelle du quotient)

Soit E un K-espace vectoriel, soit F un sous-espace vectoriel de E. Il existe une unique structure d'espace vectoriel sur E/F telle que la projection canonique

$$\pi \ : \ E \to E/F$$

soit linéaire.

Exemple

Quotient de K^2 par la droite $D = \{x + y = 0\}$: on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix}$, et $K^2/D \simeq K$ via $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y$.

Passage au quotient

Théorème 1.9

Soit E un K-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Soit $u : E \to E'$ linéaire. On suppose que $F \subset \ker u$. Alors il existe une unique application linéaire $\tilde{u} : E/F \to E'$ telle que $u = \tilde{u} \circ \pi$.

Corollaire 1.10

Soit $u : E \to E'$ linéaire, alors u induit un isomorphisme $E/\ker u \simeq \mathrm{Im}(u)$.

Exemple

Soit $k \in \mathbb{N}$. L'unique application linéaire $K[X] \to K[X]$ définie par $X^n \mapsto \binom{k}{n} X^n$ s'annule sur les multiples de X^{k+1}, elle induit donc une application linéaire $K[X]/X^{k+1}K[X] \to K[X]$.

Théorème du rang

Proposition 1.11

Soit E un K-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors $\dim E/F + \dim F = \dim E$.

Corollaire 1.12 (Théorème du rang)

Soit $u : E \to E'$ linéaire, alors

$$\operatorname{rg} u + \dim \ker u = \dim E.$$

Corollaire 1.13

Soient E, E' des K-espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est injectif

(ii) u est surjectif

(iii) u est un isomorphisme.