La dimension de Hausdorff

ABOU YASSIN Jad

14 juin 2018

Sommaire

Distance de Hausdorff
- ϵ-épaississement
- Distance de Hausdorff
- Complétude de $(\mathcal{H}(X), h)$

Théorème du point fixe contractant et théorème de Hutchinson

Construction de fractales grâce au théorème de Hutchinson

Dimension de Hausdorff

Soit (X, d) un espace métrique complet, avec $X \subset \mathbb{R}^d$ pour un certain $d \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathcal{H}(X)$ comme étant l'ensemble des compacts non vide de X.

Définition

Soit $A \in \mathcal{H}(X)$. On définit *l'ϵ-épaississement* de A comme étant l'ensemble

$$\begin{aligned} A_\epsilon &= \{x \in X, \quad \exists y \in A,\ d(x,y) \leq \epsilon\} \\ &= \{x \in X, \quad d(x,A) \leq \epsilon\} \end{aligned}$$

Où $\forall x \in X,\ d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y) = \min_{y \in A} d(x,y)$, car A est compact.

On pose, pour tout A et B dans $\mathcal{H}(X)$,

$$d(A, B) = \max_{x \in A} d(x, B)$$

On a alors, pour tout $\epsilon > 0$

$$d(A, B) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subset B_\epsilon$$

Remarque

On garde la notation d mais ce n'est pas une distance lorsqu'elle est définie sur $\mathcal{H}(X)^2$, car d n'est pas symétrique.

Définition

Soit A et B dans $\mathcal{H}(X)$, la *distance de Hausdorff* entre A et B est définie par

$$\begin{aligned} h(A,B) &= \max\{d(A,B), d(B,A)\} \\ &= \inf\{\epsilon > 0, \quad A \subset B_\epsilon \text{ et } B \subset A_\epsilon\} \end{aligned}$$

Ainsi, $(\mathcal{H}(X), h)$ est un espace métrique.

Justification

- h est symétrique par définition et séparante car les éléments de $\mathcal{H}(X)$ sont compacts
- L'inégalité triangulaire vient de

$$\forall A, B, C \in \mathcal{H}(X), \begin{cases} d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B) \\ d(B,A) \leq d(B,C) + d(C,A) \end{cases}$$

Proposition

Soit $A, B, C, D \in \mathcal{H}(X)$. On a

$$h(A \cup B,\ C \cup D) \leq \max\{h(A, C), h(B, D)\}$$

Preuve

Soit $\epsilon = \max\{h(A, C), h(B, D)\}$. On a alors

$$\begin{cases} A \subset C_\epsilon & \text{et} \quad C \subset A_\epsilon \\ B \subset D_\epsilon & \text{et} \quad D \subset B_\epsilon \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} A \cup B & \subset & C_\epsilon \cup D_\epsilon & = & (C \cup D)_\epsilon \\ C \cup D & \subset & A_\epsilon \cup B_\epsilon & = & (A \cup B)_\epsilon \end{cases}$$

Donc $\epsilon \geq h(A \cup B,\ C \cup D)$

Proposition

L'espace métrique $(\mathcal{H}(X), h)$ est complet

Idée de preuve

On montre qu'une suite de Cauchy $(A_k)_k$ d'élements de $\mathcal{H}(X)$ quelconque converge dans $\mathcal{H}(X)$.
On pose $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$.
On montre que

1. $A \in \mathcal{H}(X)$, grâce en partie au théorème des compacts emboités
2. $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$

Sommaire

Distance de Hausdorff

Théorème du point fixe contractant et théorème de Hutchinson
- Fonctions contractantes
- Théorème du point fixe contractant
- Théorème de Hutchinson

Construction de fractales grâce au théorème de Hutchinson

Dimension de Hausdorff

Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est C-lipschitzienne, on note $\text{Lip}(f)$ sa constante de Lipschitz.

Définition

Une application $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est dite *contractante* lorsque sa constante de Lipschitz est dans $[0; 1[$, c'est-à-dire qu'elle est C-lipschitzienne pour un $C \in [0; 1[$

Théorème

Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une fonction contractante.
Alors f possède un unique point fixe.

Preuve

- Unicité : Soit x_1 et x_2 deux points fixes de f. Alors on a

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \text{Lip}(f) d(x_1, x_2)$$

  Donc $x_1 = x_2$
- Existence : Si $C = \text{Lip}(f)$ et $x \in X$. On montre que pour tout $m > n \geq 0$, on a

$$d(f^m(x), f^n(x)) \leq C^n \frac{d(f(x), x)}{1 - C}$$

  Ce qui suffit pour montrer que la suite $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc converge vers un point fixe.

Soit $f : X \to X$ une fonction contractante. On note, pour $A \subset X$

$$f(A) = \{f(x),\, x \in A\}$$

On pose $f_{\mathcal{P}} : A \in \mathcal{H}(X) \mapsto f(A) \in \mathcal{H}(X)$ (car f est continue)

Proposition

Si f est C-lipschitzienne, alors $f_{\mathcal{P}}$ l'est également.

Preuve

On montre facilement que pour $A, B \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(f_{\mathcal{P}}(A), f_{\mathcal{P}}(B)) \leq C d(A, B)$$

C'est donc aussi le cas pour h.

Remarque

Par la suite, on identifiera f et $f_{\mathcal{P}}$

Proposition

Soit $T_1, \cdots, T_n$ n fonctions contractantes définies sur $\mathcal{H}(X)$. Soit $C = \max_{1 \leq i \leq n} \text{Lip}(T_i)$. Alors

$$\begin{array}{rccc} T & : & \mathcal{H}(X) & \longrightarrow & \mathcal{H}(X) \\ & & A & \mapsto & T_1(A) \cup T_2(A) \cup \cdots \cup T_n(A) \end{array}$$

est une fonction contractante sur $\mathcal{H}(X)$, de constante de lipschitz inférieure à C.

Preuve

Par récurrence, il suffit de prouver le résultat pour $n = 2$. On a alors

$$\begin{array}{rccc} T & : & \mathcal{H}(X) & \longrightarrow & \mathcal{H}(X) \\ & & A & \mapsto & T_1(A) \cup T_2(A) \end{array}$$

Soit A et B dans $\mathcal{H}(X)$. On a

$$\begin{aligned} h(T(A), T(B)) &= h(T_1(A) \cup T_2(A), T_1(B) \cup T_2(B)) \\ &\leq \max\{h(T_1(A), T_1(B)), h(T_2(A), T_2(B))\} \\ &\leq \max\{\mathsf{Lip}(T_1)h(A, B), \mathsf{Lip}(T_2)h(A, B)\} \\ &= \max\{\mathsf{Lip}(T_1), \mathsf{Lip}(T_2)\}h(A, B) \\ &= Ch(A, B) \end{aligned}$$

Théorème de Hutchinson

On déduit de ce qui précède le **Théorème de Hutchinson**

Théorème

Soit $K_1, \cdots, K_n$ des fonctions contractantes sur un espace métrique complet X, et C le maximum de leurs constantes de Lipschitz. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} K & : & \mathcal{H}(X) & \longrightarrow & \mathcal{H}(X) \\ & & A & \mapsto & K_1(A) \cup K_2(A) \cup \cdots \cup K_n(A) \end{array}$$

est une fonction contractante et C-lipschitzienne sur $\mathcal{H}(X)$

Sommaire

Distance de Hausdorff

Théorème du point fixe contractant et théorème de Hutchinson

Construction de fractales grâce au théorème de Hutchinson
- L'ensemble triadique de Cantor
- Deux extensions de l'ensemble de Cantor en dimsension 2 et 3
- Courbe de Von Koch

Dimension de Hausdorff

Le *théorème de Hutchinson* ainsi que le *théorème du point fixe contractant* vont nous permettre de construires des figures fractales comme étant l'unique point fixe d'une fonction contractante sur $\mathcal{H}(X)$.
Dans les exemples qui vont suivre, nous nous placerons dans les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, et $\mathbb{R}^3$, qui munis de la distance euclidienne sont des espaces métriques complets.

Ici, $X = \mathbb{R}$. On pose

$$\begin{array}{ccccc} T_1 & : & X & \to & X \\ & & x & \mapsto & \frac{x}{3} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} T_2 & : & X & \to & X \\ & & x & \mapsto & \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \end{array}$$

Alors le théorème de Hutchinson assure que

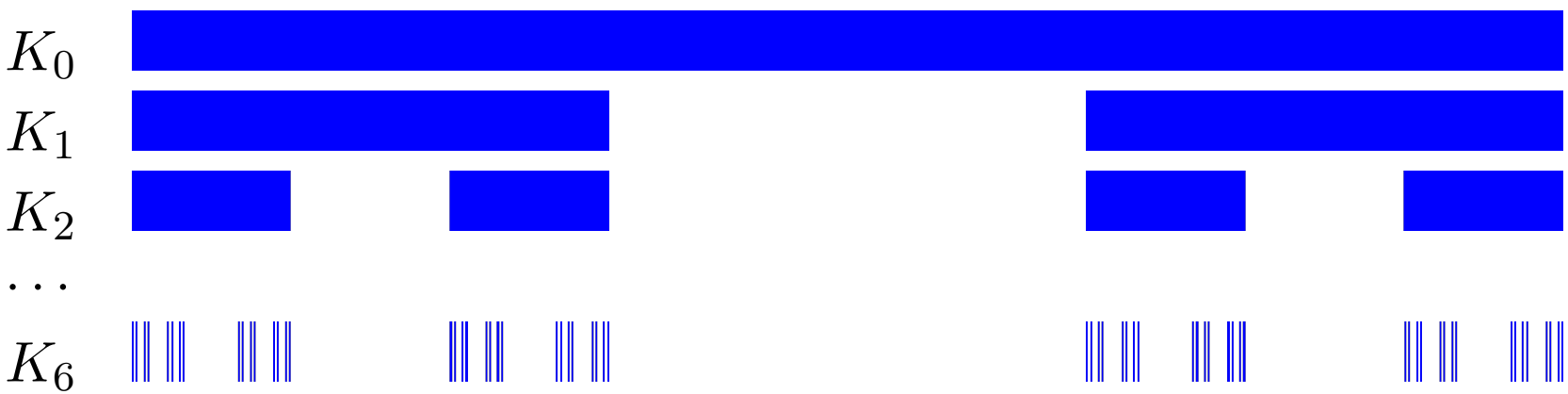
$$\begin{array}{ccccc} T & : & \mathcal{H}(X) & \to & \mathcal{H}(X) \\ & & A & \mapsto & T_1(A) \cup T_2(A) \end{array}$$

est une fonction contractante ($\text{Lip}(T) < 1$). Le théorème du point fixe contractant donne un unique $K \in \mathcal{H}(X)$ tel que $T(K) = K$. Il s'agit de l'*ensemble de Cantor*.

Cantor a introduit cet ensemble par une construction itérative :

- $K_0 = [0; 1]$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, K_n s'obtient en supprimant le tiers central de chaque intervalle constituant K_{n-1}

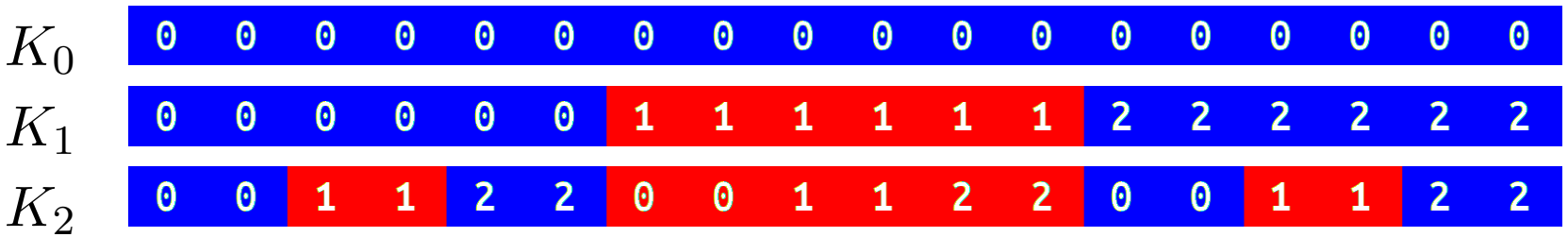
Il définit alors $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$



Pour voir que l'ensemble obtenu comme étant l'unique point fixe de T est en effet l'ensemble de Cantor, on peut utiliser la représentation des réels de $[0;1]$ en base 3. En effet, par la construction de Cantor, on a

$$\begin{aligned} K &= \{x \in [0;1],\ x \text{ ne possède pas de 1 dans son écriture en base 3}\} \\ &= \left\{0.\epsilon_1\epsilon_2\cdots,\ (\epsilon_n) \in \{0;2\}^{\mathbb{N}^*}\right\} \end{aligned}$$

Visuellement :



Montrons maintenant que $\left\{0.\epsilon_1\epsilon_2\cdots,\ (\epsilon_n)\in\{0;2\}^{\mathbb{N}^*}\right\}$ est un point fixe de T.

On a en fait

$$\begin{aligned} T(K) &= \left\{0.0\epsilon_2\epsilon_3\cdots,\ (\epsilon_n)\in\{0;2\}^{[2;+\infty[}\right\} \\ &\quad \cup\left\{0.2\epsilon_2\epsilon_3\cdots,\ (\epsilon_n)\in\{0;2\}^{[2;+\infty[}\right\} \\ &= K \end{aligned}$$

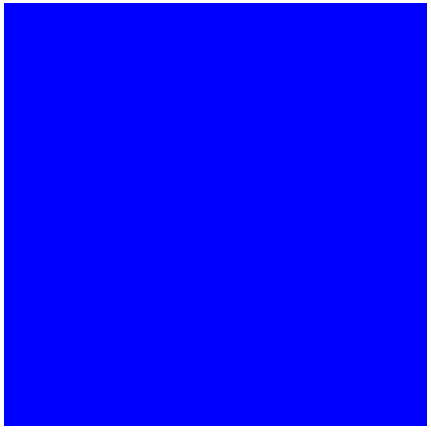
Par unicité du point fixe d'une fonction contractante, K est bien l'ensemble de Cantor. En fait, l'unicité du point fixe contractant montre que quelque soit $C\in\mathcal{H}(X)$, la suite $\left(T^n(C)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'ensemble de Cantor.

Tapis de Sierpinski

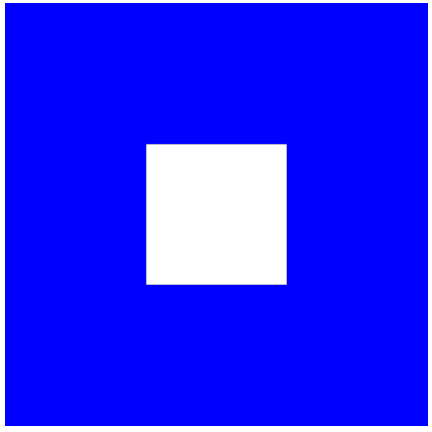
On peut appliquer la construction par suppression du «tiers milieu» à des figures de dimensions supérieures. Par exemple, en supprimant le «neuvième milieu» du carré $S_0 = [0,1]^2$, on obtient l'ensemble

$$\begin{array}{rlllllll} S_1 = & [0;\frac{1}{3}] \times [0;\frac{1}{3}] & \cup & [0;\frac{1}{3}] \times [\frac{1}{3};\frac{2}{3}] & \cup & [0;\frac{1}{3}] \times [\frac{2}{3};1] \\ \cup & [\frac{1}{3};\frac{2}{3}] \times [0;\frac{1}{3}] & \cup & [\frac{1}{3};\frac{2}{3}] \times [\frac{2}{3};1] & & \\ \cup & [\frac{2}{3};1] \times [0;\frac{1}{3}] & \cup & [\frac{2}{3};1] \times [\frac{1}{3};\frac{2}{3}] & \cup & [\frac{2}{3};1] \times [\frac{2}{3};1] \end{array}$$

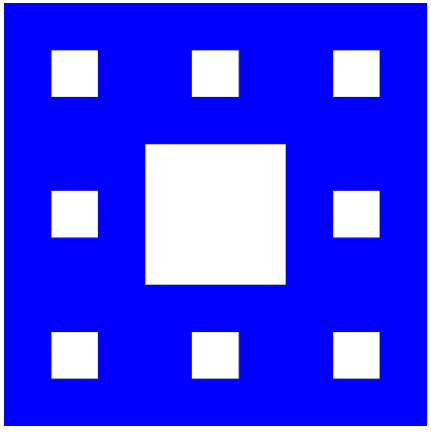
Réunion de huit carrés de côté $\frac{1}{3}$. En appliquant le même procédé sur chacun des huit carrés, on obtient comme pour la construction originale de l'ensemble de Cantor un ensemble limite en prenant $S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$. Cet figure est le *tapis de Sierpinski*.



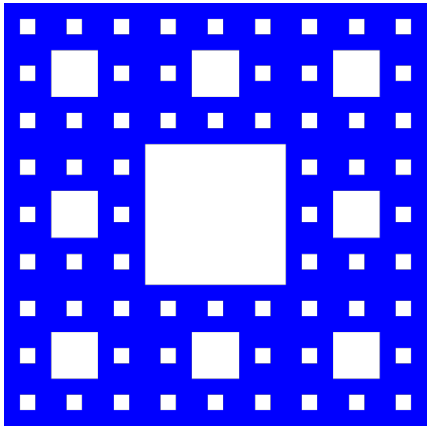
S_0



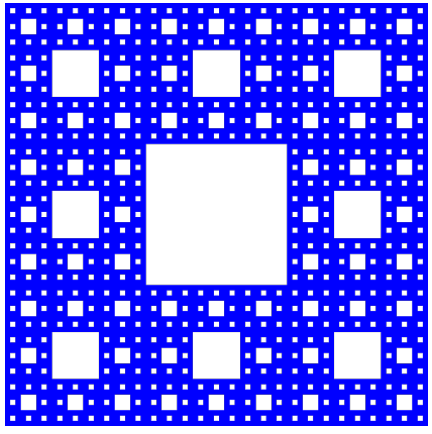
S_1



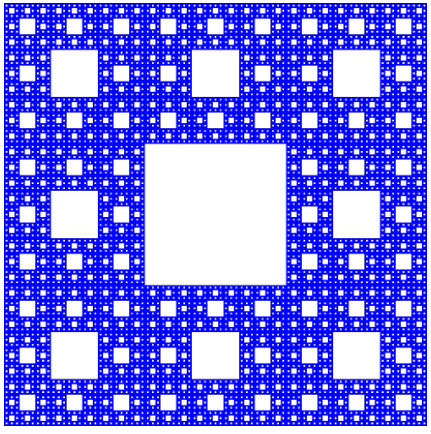
S_2



S_2



S_4

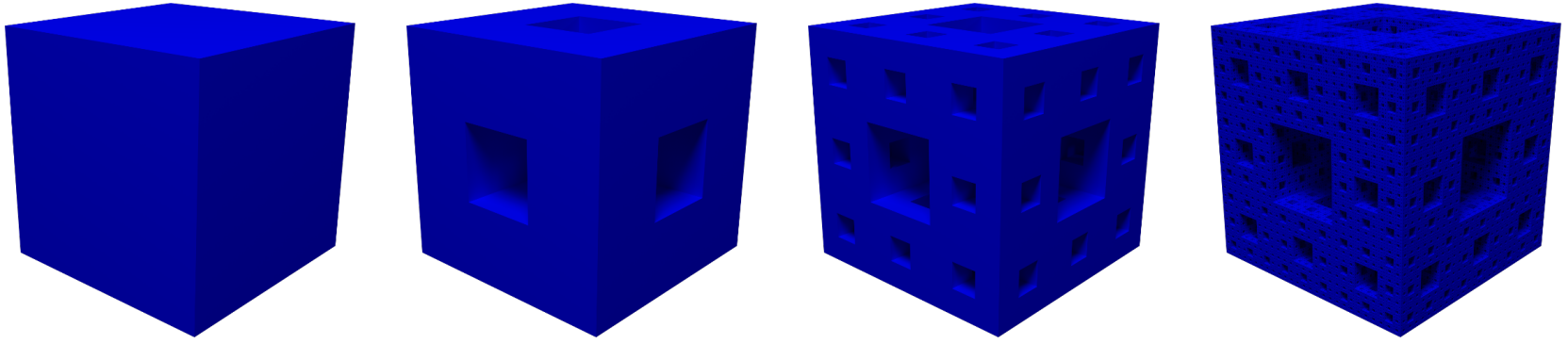


S_5

Éponge de Menger

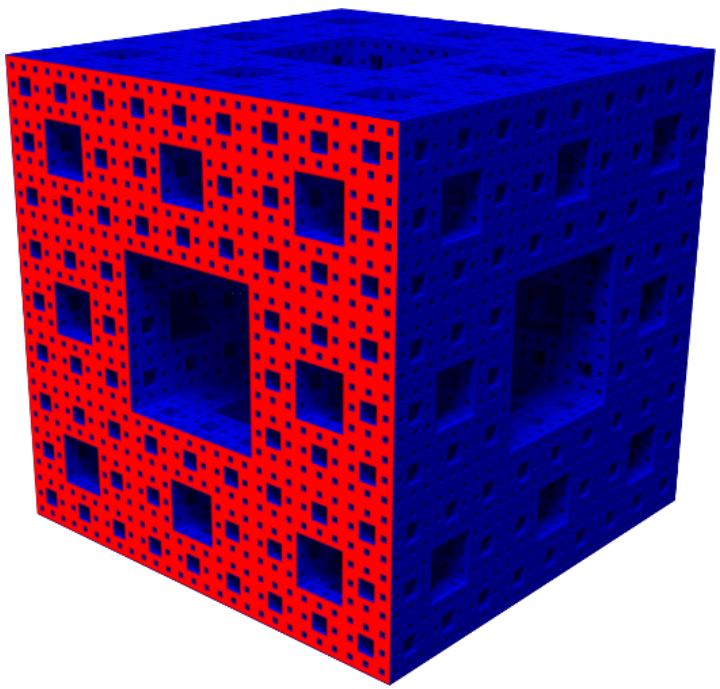
En dimension 3, en prenant $X = \mathbb{R}^3$, on peut appliquer à un cube la fonction effectuant la transformation suivante : à une partie de $M \in \mathcal{H}(X)$, on associe l'union de 20 images de M par les fonctions contractantes de la forme $f : (x, y, z) \in X \mapsto \left(\frac{x+\epsilon_1}{3}, \frac{y+\epsilon_2}{3}, \frac{z+\epsilon_3}{3}\right) \in X$ où $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \in \{0; 1; 2\}^3$ avec au plus un ϵ égal à 1.

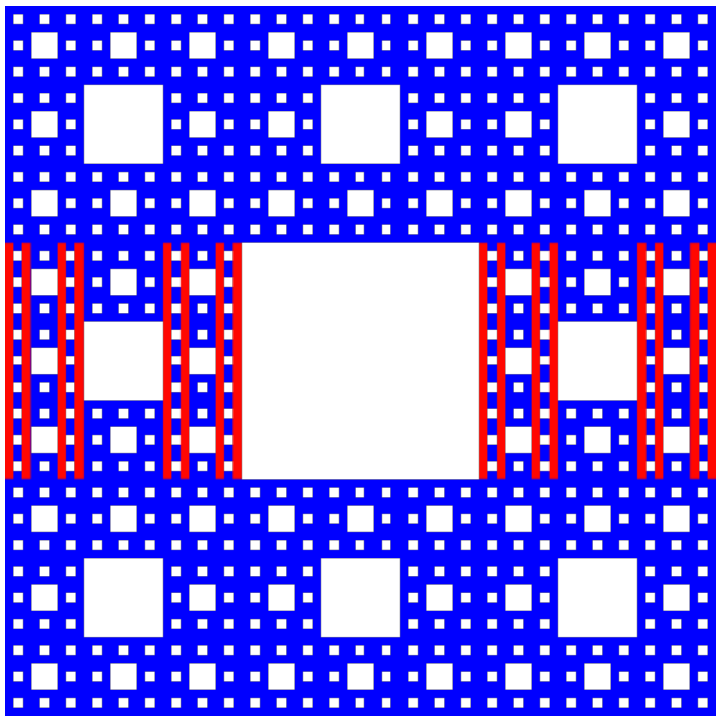
On obtient ainsi l'*éponge de Menger*



M_0 M_1 M_2 M_6

Comme l'éponge de Menger et le tapis de Sierpinski sont des extensions de l'ensemble de Cantor en dimension respectivement 2 et 3, on retrouve sur chaque face extérieure de l'éponge de Menger le tapis de Sierpinski, et on retrouve dans le tapis de Sierpinski l'ensemble de Cantor.





Ici, $X = \mathbb{R}^2$. Soient $(x, y) \in X$, on pose

$$T_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad T_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$T_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix} \quad T_4\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

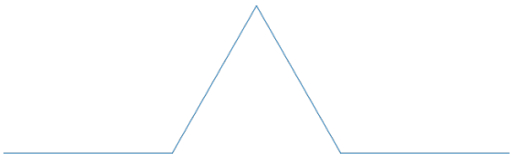
Ces fonctions sont contractantes (composées d'homothétie et d'isométries). En posant pour tout $A \in \mathcal{H}(x)$

$$T(A) = T_1(A) \cup T_2(A) \cup T_3(A) \cup T_4(A)$$

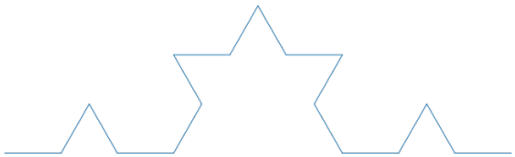
Le théorème de Hutchinson ainsi que le théorème du point fixe contractant donnent que T a un unique point fixe K, qui est la *courbe de Von Koch*.

L'unicité d'un tel point fixe se voit bien en prenant deux ensembles différents initialement.

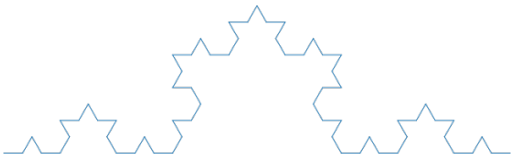
K_0



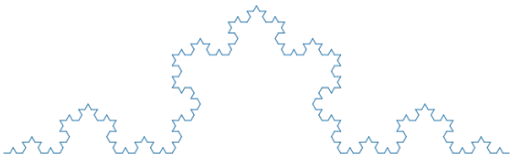
K_1



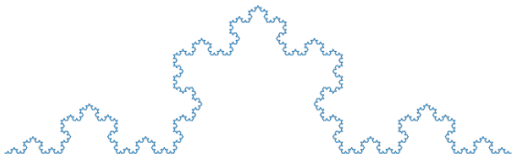
K_2



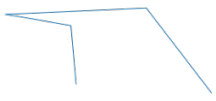
K_3



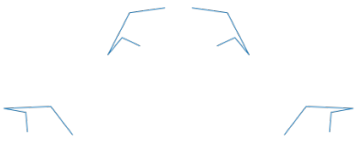
K_4



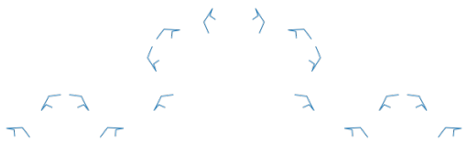
K_5



K'_0



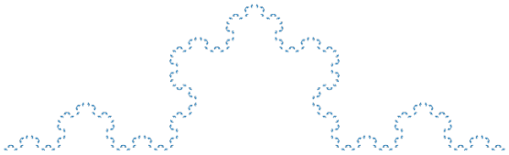
K'_1



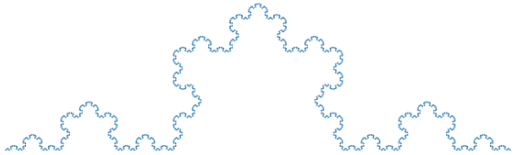
K'_2



K'_3



K'_4



K'_5

Sommaire

Distance de Hausdorff

Théorème du point fixe contractant et théorème de Hutchinson

Construction de fractales grâce au théorème de Hutchinson

Dimension de Hausdorff
- Rapide définition
- Condition de Moran
- Calculs de dimensions de Hausdorff

Si $\epsilon > 0$, soit $\mathcal{B}$ un recouvrement dénombrable de X par des boules B_i de rayon r_i au plus ϵ. On pose $m_t(\mathcal{B}) = \sum_{k=0}^{\infty} r_i$, éventuellement infini. On pose alors

$$M_t(X) = \lim_{\epsilon \to 0} \inf m_t(\mathcal{B})$$

où l'$\inf$ est pris sur l'ensemble des ϵ-recouvrements dénombrables $\mathcal{B}$ de X. Il s'agit de la mesure de Hausdorff
On vérifie que si $M_s(X)$ est fini alors, pour tout $t > s$, $M_t(X) = 0$ et que si $M_s(X) > 0$ alors, pour tout $t < s$, $M_t(X)$ est infini. On pose alors

$$d = \inf\{s > 0,\ M_s(X) = 0\} = \sup\{s > 0,\ M_s(X) = \infty\}$$

d est la *dimension de Hausdorff* de X

Le calcul pratique de la dimension de Hausdorff d'un espace métrique X peut être difficile. La condition de Moran permet, dans certains cas, d'avoir un accès plus simple à la dimension de Hausdorff.

Condition de Moran

On dit que $A \subset X$ vérifie la condition de Moran s'il existe $f_1, \cdots, f_n$ n similitudes de rapport respectivement $r_1, \cdots, r_n$ strictement inférieurs à 1 et $\mathcal{O}$ un ouvert de A tel que

- $\forall i,\ f_i(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$
- $\forall i \neq j,\ f_i(\mathcal{O}) \cap f_j(\mathcal{O}) = \emptyset$
- $A = f_1(A) \cup \cdots \cup f_n(A)$

Si $A \subset X$ vérifie la condition de Moran, on a alors

$$r_1^d + \cdots + r_n^d = 1$$

Tous les exemples vus précédemment vérifient la condition de Moran (les fonctions contractantes étaient des similitudes et les trois critères sont vérifiés). On va donc pouvoir calculer aisément leur dimension de Hausdorff.
Par exemple, l'ensemble de Cantor s'obtient par deux similitudes de rapport $\frac{1}{3}$. On a donc :

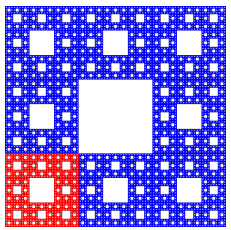
$$2\left(\frac{1}{3}\right)^d = 1 \Rightarrow d = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0.63$$

Informellement, ceci correspond au fait que « lorsqu'on agrandit trois fois l'ensemble de Cantor, on obtient deux répliques de lui-même »



- Le tapis de Sierpinski s'obtient par huit similitudes de rapport $\frac{1}{3}$. On a donc :

$$8\left(\frac{1}{3}\right)^d = 1 \Rightarrow d = \frac{\ln(8)}{\ln(3)} \approx 1.89$$



- L'éponge de Menger s'obtient par vingt similitudes de rapport $\frac{1}{3}$. On a donc :

$$20\left(\frac{1}{3}\right)^d = 1 \Rightarrow d = \frac{\ln(20)}{\ln(3)} \approx 2.73$$

- La courbe de Von Koch s'obtient par quatre similitudes de rapport $\frac{1}{3}$. On a donc :

$$4\left(\frac{1}{3}\right)^d = 1 \Rightarrow d = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.26$$

