Colles MP1

Jad ABOU YASSIN

6 février 2023

Topologie dans les espaces vectoriels normés

Table des matières

Questions de cours **2**

Topologie dans les espaces vectoriels normés 2

Exercice 1 - Ouverts et fermés 2

Exercice 2 - Application linéaire continue 2

Exercice 3 - Densité 2

Exercices **2**

Topologie dans les espaces vectoriels normés 2

Exercice 4 - ★☆☆ Adhérences et intérieurs 2

Exercice 5 - ★★☆ Continuité et noyau 3

Exercice 6 - ★★☆ Topologie et réduction 3

Exercice 7 - ★★★ Projection sur un convexe fermé non vide 3

Exercice 8 - ★★☆ Théorème de Baire 4

Questions de cours

Topologie dans les espaces vectoriels normés

Exercice 1 - Ouverts et fermés

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Définissez la notion de parties ouverte et fermé de E. Montrez que les boules ouvertes sont ouvertes, et que les boules fermées sont fermées.

Exercice 2 - Application linéaire continue

Soient $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrez que f et continue si et seulement si

$$\exists C > 0,\, \forall x \in E, \quad ||f(x)||_F \leq C\, ||x||_E$$

Montrez de plus que c'est toujours le cas si E est de dimension finie.

Exercice 3 - Densité

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Définissez la notion de partie dense de E. Montrez que Q est dense dans $\mathbb{R}$ et que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathbb{K}$.

Exercices

Topologie dans les espaces vectoriels normés

★☆☆ Exercice 4 - Adhérences et intérieurs (solution 👈)

Donnez un exemple d'une partie A d'un espace normé E tel que tous les éléments suivants soient distincts

$$A, \quad \mathring{A}, \quad \overline{A}, \quad \overline{\mathring{A}}, \quad \mathring{\overline{A}}, \quad \overline{\mathring{\overline{A}}}, \quad \mathring{\overline{\mathring{A}}}$$

Montrez de plus que pour toute partie A d'un espace normé E, on a les égalités suivantes

$$\overline{\mathring{\overline{A}}} = \overline{\mathring{A}} \quad \text{et} \quad \mathring{\overline{\mathring{A}}} = \mathring{\overline{A}}$$

★★☆ Exercice 5 - Continuité et noyau (solution 👇)

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et f une forme linéaire sur E.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrez que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrez que $\ker(f)$ est un sous-espace soit fermé, soit dense dans E
3. Montrez que f est continue si et seulement si $\ker(f)$ est fermé.

★★☆ Exercice 6 - Topologie et réduction (solution 👇)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $S_A = \{PAP^{-1} \ ; \ P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ sa classe de similitude.

1. Montrez que si A est inversible, alors $\overline{S_A} \subset GL_n(\mathbb{C})$
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrez qu'il existe C une constante positive telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice triangulaire supérieure dans S_A telle que les coefficients sur-diagonaux soient tous de module $\leq C\varepsilon$.
3. Montrez que S_A est fermé si et seulement si A est diagonalisable.

★★★ Exercice 7 - Projection sur un convexe fermé non vide (solution 👇)

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soit C un sous-ensemble convexe, fermé et non vide de E. Le but de l'exercice est de définir une projection sur C.

1. Soit $x \in E$. Montrez qu'il existe un élément $p_C(x) \in C$ tel que $||x - p_C(x)|| = \inf_{y \in C} ||x - y||$. On pourra utiliser l'identité du parallélogramme et une suite $(y_n)_n$ minimisante et montrer qu'elle est de Cauchy.
2. Montrer qu'un tel élément est unique, puis qu'il est caractérisé par :

$$\begin{cases} p_C(x) \in C \\ \forall y \in C \, , \, \langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0 \quad \text{(condition de l'angle obtus)} \end{cases}$$

Indication : Pour le sens direct, on pourra regarder $||x-(1-t)p_C(x)-ty||^2$, pour le sens réciproque, on pourra développer $||x-z||^2$ judicieusement, où z vérifie la caractérisation de $p_C(x)$

3. Montrez que p_C n'est pas linéaire dans le cas général. Montrez que p_C est 1-lipschitzienne.
4. Que dire à propos de p_C si C est un sous-espace vectoriel de E ?

★★☆ Exercice 8 - Théorème de Baire (solution)

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Soient D_1 et D_2 deux parties denses de E. Est-ce que $D_1 \cup D_2$ est dense dans E ? Et $D_1 \cap D_2$?
2. Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts denses de E. Le reste de l'exercice est consacré à la démonstration du théorème de Baire : l'intersection des Ω_n est encore dense dans E (mais pas forcément ouverte)

   Soit $U \subset E$ un ouvert. Montrez que $U \cap \Omega_0 \neq \emptyset$, et qu'il existe $x_0 \in \Omega_0$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset U \cap \Omega_0$.
3. Montrez par récurrence qu'on peut construire une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $(r_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \in \Omega_n \quad \text{et} \quad r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{B}(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap \Omega_n$$

4. Montrer le fait suivant : Soit $(F_n)_n$ une suite de fermés de E décroissante pour l'inclusion de diamètre tendant vers zéro. Alors

$$\exists y \in E, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{y\}$$

5. En déduire le théorème de Baire

Corrections

Solution 4 - Adhérences et intérieurs (☞ exercice)

Il y a plusieurs exemples possibles, on peut par exemple prendre $E = \mathbb{R}$ (avec la norme « valeur absolue ») et

$$A =]0,1[\cup]1,2] \cup \{3\} \cup ([4,5] \cap \mathbb{Q})$$

On a alors :

$$\begin{array}{ll} \mathring{A} =]0,1[\cup]1,2[& \overline{A} = [0,2] \cup \{3\} \cup [4,5] \\ \overline{\mathring{A}} = [0,2] & \mathring{\overline{A}} =]0,2[\cup]4,5[\\ \mathring{\overline{\mathring{A}}} =]0,2[& \overline{\mathring{\overline{A}}} = [0,2] \cup [4,5] \end{array}$$

Montrons que $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$. L'autre égalité se fait en passant au complémentaire. On le fait par double inclusion. Comme tout ensemble est inclus dans son adhérence, on a

$$\mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}}$$

Comme l'application $X \mapsto \mathring{X}$ est croissante et idempotente, on a alors

$$\mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}}$$

Comme l'application $X \mapsto \overline{X}$ est croissante, on a finalement

$$\overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$$

Réciproquement, tout intérieur d'un ensemble est inclus dans celui-ci. On a donc l'inclusion

$$\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}}$$

Comme l'application $X \mapsto \overline{X}$ est croissante et idempotente, on a alors l'inclusion

$$\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$$

D'où l'égalité entre ces deux ensembles.

Solution 5 - Continuité et noyau (☞ exercice)

1. On utilise la caractérisation séquentielle des fermés : soient $x, y \in \overline{F}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a $(x_n)_n, (y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ qui convergent vers x et y. Alors par continuité de la somme et de la

multiplication par un scalaire,

$$\lambda x_n + \mu y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda x + \mu y$$

Or, la suite $(\lambda x_n + \mu y_n)_n$ est à valeurs dans F car c'est un sous-espace vectoriel de E, donc la limite $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$, qui est donc bien un sous-espace vectoriel de E.

2. Par ce qui précède, $\overline{\ker(f)}$ est un sous-espace vectoriel fermé. Si f est nulle, alors $\ker(f) = E$ est bien-sûr dense dans E. Sinon, alors $\ker(f)$ est de codimension 1, et inclus dans $\overline{ker(f)}$. On a donc exactement deux cas :
   - Soit $\ker(f) = \overline{\ker(f)}$, et alors $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E
   - Soit $\ker(f) \subsetneq \overline{\ker(f)}$, et alors $\overline{\ker(f)} = E$, donc $\ker(f)$ est dense dans E
3. Si f est continue, alors $\ker(f) = f^{-1}(0)$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc c'est un fermé. Montrons le sens réciproque, qui demande un peu de travail. On raisonne par contraposée. Si f n'est pas continue, alors elle est en particulier non nulle, mais il existe également une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires tels que $0 \neq |f(x_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (car f est continue si et seulement si l'image de la boule unité de E est bornée). Comme f est non nulle, il existe $x \in E \setminus \ker(f)$ car $\ker(f)$ est de codimension 1. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = x - \frac{f(x)}{f(x_n)} x_n$$

La suite $(u_n)_n$ est une suite de E qui vérifie $f(u_n) = f(x) - f(x) = 0$, c'est donc une suite d'éléments de $\ker(f)$. Or, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \notin \ker(f)$, donc $\ker(f)$ n'est pas fermé.

Solution 6 - Topologie et réduction (☞ exercice)

1. Soit $B \in \overline{S_A}$ limite de $(B_n)_n \in (S_A)^{\mathbb{N}}$. Comme le déterminant est invariant par conjugaison, on a $\det(B_n) = \det(A)$ pour tout n, donc par continuité du déterminant, on a $\det(B) = \det(A) \neq 0$. Donc B est inversible.
2. Comme A est une matrice complexe, elle est trigonalisable. On écrit $P^{-1}AP = T$ où T est triangulaire supérieure. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $D = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1})$. Alors la matrice $D^{-1}TD$ est triangulaire supérieure, de même diagonale que T, et le coefficient en (i, j) pour $i < j$ est $\varepsilon^{j-i} T_{i,j}$. On pose alors $C = \max_{i<j} |T_{i,j}|$, et alors $(PD)^{-1}A(PD)$ est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients sur-diagonaux sont tous de module $\leq C\varepsilon$
3. On prend une suite de matrices triangulaires semblables à A dont les coefficients sur-diagonaux tendent vers 0 par la question précédente. Alors la limite est une matrice diagonale, qui est conjuguée à A car la classe de similitude de A est fermée. Donc A est diagonalisable.

Réciproquement, si A est diagonalisable, alors tout élément B de S_A vérifie $\pi_A(B) = 0$, car deux matrices semblables ont même polynôme annulateur. Comme l'application π_A est polynomiale, elle est continue sur $M_n(\mathbb{C})$. En particulier, toute matrice B adhérente à S_A vérifie $\pi_A(B) = 0$. Comme A est diagonalisable, alors π_A est scindé à racines simples. Donc B admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc B est diagonalisable. Montrons que $\chi_A = \chi_B$, cela permettra de conclure que A et B sont semblables **parce qu'elles sont toutes les deux diagonalisables** (c'est faux de manière générale). En effet, les valeurs propres de A et B coïncident, ainsi que la dimension des espaces propres. Dans une base adaptée à chacune d'elles, elles sont diagonales avec autant de répétition de la même valeur propre. Une matrice de passage entre ces deux bases fournie une matrice inversible P telle que $PBP^{-1} = A$. Montrons donc que $\chi_B = \chi_A$. Soit $(A_k)_k$ une suite de matrices dans S_A qui converge vers B. Alors $\chi_{A_k} = \chi_A$ pour tout k, car deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Ainsi, la suite de polynômes $(\chi_{A_k})_k$ est constante, et donc converge vers χ_A dans $\mathbb{R}[X]$. D'où le résultat.

Solution 7 - Projection sur un convexe fermé non vide (☞ exercice)

1. Soit $(y_n)_n$ une suite minimisante pour l'inf considéré. On a, par l'identité du parallélogramme, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$:

$$||y_n - x + y_m - x||^2 + ||y_n - x - y_m + x||^2 = 2\left(||y_n - x||^2 + ||y_m - x||^2\right)$$

Ainsi, on a

$$||y_n - y_m||^2 = 2\left(||y_n - x||^2 + ||y_m - x||^2\right) - ||y_n + y_m - 2x||^2 \tag{1}$$

Étudions le dernier terme. Par inégalité triangulaire, on a la majoration

$$||y_n + y_m - 2x||^2 \leq (||y_n - x|| + ||y_m - x||)^2 \xrightarrow[n,m\to+\infty]{4} d^2$$

où $d = \inf_{y\in C} ||x - y||$. De plus, comme C est connexe, alors $(y_n + y_m)/2 \in C$. Par définition de d, on a donc la majoration

$$||y_n + y_m - 2x||^2 = 4\left|\left|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right|\right|^2 \geq 4d^2$$

Par encadrement, on obtient que

$$||y_n + y_m - 2x||^2 \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 4d^2$$

En revenant à l'équation 1 et en passant à la limite, on obtient que

$$||y_n - y_m||^2 \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 2(d^2+d^2) - 4d^2 = 0$$

Ceci montre que la suite $(y_n)_n$ est de CAUCHY. Comme E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors la suite converge dans C (qui est fermé). On note $p_C(x)$ la limite.

2. Soit $y \in C$ un élément tel que $||x-y|| = ||x-p_C(x)||$. Alors par convexité de C, $(p_C(x)+y)/2 \in C$.

$$\left|\left|\frac{p_C(x)+y}{2} - x\right|\right| = \left|\left|\frac{p_C(x)-x}{2} + \frac{y-x}{2}\right|\right| \leq \left|\left|\frac{p_C(x)-x}{2}\right|\right| + \left|\left|\frac{y-x}{2}\right|\right| = ||p_C(x)-x||$$

Mais comme $p_C(x)$ réalise le minimum de la distance de x à C, on a aussi

$$\left|\left|\frac{p_C(x)+y}{2} - x\right|\right| \geq ||p_C(x)-x||$$

Ainsi, toutes les inégalités sont des égalités. En particulier, on a égalité dans l'inégalité triangulaire : il existe $\lambda \geq 0$ tel que $p_C(x) - x = \lambda(y-x)$. Comme $||p_C(x)-x|| = ||y-x||$, alors $\lambda = 1$, donc $y = p_C(x)$. D'où l'unicité.

Montrons la caractérisation. Montrons d'abord que $p_C(x)$ vérifie bien la caractérisation. Tout d'abord, $p_C(x) \in C$ par définition. De plus, par convexité de C, on a pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $y \in C$:

$$\begin{aligned}
||x-p_C(x)||^2 &\leq ||x-(1-t)p_C(x)-ty||^2 \\
&= ||x-p_C(x)-t(y-p_C(x))||^2 \\
&= ||x-p_C(x)||^2 + t^2||y-p_C(x)||^2 - 2t\langle x-p_C(x), y-p_C(x)\rangle
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $0 < t \leq 1$, on peut simplifier par $2t$:

$$\langle x-p_C(x), y-p_C(x)\rangle \leq \frac{t}{2}||y-p_C(x)||^2$$

On conclut en faisant tendre t vers 0.

Réciproquement, soit $z \in E$ vérifiant la caractérisation. Alors $z \in C$. De plus, si $y \in C$, on a :

$$||y-x||^2 = ||y-z+z-x||^2 = ||y-z||^2+||x-z||^2-2\langle x-z, y-z\rangle \geq ||y-z||^2+||x-z||^2 \geq ||x-z||^2$$

Ainsi, z atteint bien le minimum de la distance à x de tous les éléments de C. Par unicité d'un tel élément, $z = p_C(x)$. D'où la caractérisation de $p_C(x)$

3. Si 0 ne contient pas C, alors en particulier $p_C(0) \neq 0$, donc p_C n'est pas linéaire ! Montrons

maintenant qu'elle est 1-lipschitzienne. Soient $x, y \in E$. On a les caractérisations :

$$\langle x - p_C(x), z - p_C(x)\rangle \leq 0 \quad \forall z \in C$$
$$\langle y - p_C(y), w - p_C(y)\rangle \leq 0 \quad \forall w \in C$$

On prend alors $z = p_C(y)$ et $w = p_C(x)$, qui sont bien des éléments de C, et on somme ces inégalités :

$$0 \geq \langle x - p_C(x) - y + p_C(y), p_C(y) - p_C(x)\rangle = \langle x - y, p_C(y) - p_C(x)\rangle + ||p_C(x) - p_C(y)||^2$$

Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$||p_C(x) - p_C(y)||^2 \leq \langle x - y, p_C(x) - p_C(y)\rangle \leq ||x - y||\,||p_C(x) - p_C(y)||$$

Si $p_C(x) = p_C(y)$, on a l'inégalité voulue. Sinon, on divise par $||p_C(x) - p_C(y)||$ pour conclure.

4. Si C est un sous-espace vectoriel de E, alors on a toujours une application p_C bien définie car un sous-espace vectoriel de E est un convexe, fermé et est non vide. L'application $x \mapsto p_C(x)$ étant celle qui renvoie l'unique élément de C minimisant la distance à x, il s'agit de la projection orthogonale sur C. (c'est une des caractérisations de la projection orthogonale vue en cours). Sinon, on peut le retrouver via la caractérisation de C. En effet, si C est un espace vectoriel, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in C$, $\lambda y \in C$. En particulier, la condition de l'angle obtus donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall y \in C,\ \langle x - p_C(x), ty - p_C(x)\rangle \leq 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall y \in C,\ t\langle x - p_C(x), y\rangle \leq \langle x - p_C(x), p_C(x)\rangle$$

Donc $\langle x - p_C(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in C$, donc $x - p_C(x) \in C^\perp$.

Solution 8 - Théorème de Baire (☞ exercice)

1. Oui, on a l'inclusion $D_1 \subset D_1 \cup D_2$ donc $E = \overline{D_1} \subset \overline{D_1 \cup D_2}$. Pour l'intersection, c'est faux par contre. Par exemple, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, mais d'intersection vide (qui n'est pas dense dans $\mathbb{R}$)
2. Comme Ω_0 est dense dans E, il intersecte tout ouvert de E. Donc $U \cap \Omega_0 \neq \emptyset$. De plus, comme U et Ω_0 sont des ouverts, leur intersection est aussi un ouvert, qui est non vide par ce qui précède. En particulier, il contient une boule ouverte centrée en un certain $x_0 \in \Omega_0$ et

de rayon $2r_0 > 0$, et donc il contient la boule fermée de même centre et de rayon r_0.

3. On suppose vrai le résultat au rang n. On a $\Omega_{n+1} \cap B(x_n, r_n) \neq \emptyset$ car Ω_{n+1} est dense dans E, et c'est un ouvert non vide car Ω_{n+1} et $B(x_n, r_n)$ sont des ouverts d'intersection non vide. Ainsi, on peut trouver $x_{n+1} \in \Omega_{n+1}$ et $r_{n+1} > 0$ tel que $B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap \Omega_{n+1}$. Quitte à réduire r_{n+1} , on peut même supposer que $r_{n+1} \leq r_n/2$. Alors la boule fermée $\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1})$ est bien incluse dans $B(x_n, r_n) \cap \Omega_{n+1}$.

4. Montrons d'abord que l'intersection des F_n est non vide. Pour ce faire, on va considérer pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élément $y_n \in F_n$. La suite $(y_n)_n$ est alors une suite bornée de E (car les F_n sont de diamètres finis à partir d'un certain rang). Comme E est de dimension finie et que chacune des coordonnées de la suite $(y_n)_n$ (dans une base quelconque qu'on a fixée) est donc bornée dans $\mathbb{R}$, elles admettent une valeur d'adhérence. Par extraction successives, la suite $(y_n)_n$ admet une valeur d'adhérence $y \in E$. Comme pour tout $N \in \mathbb{N}$, la suite $(y_n)_n$ est à valeurs dans F_N pour $n \geq N$ (la suite $(F_n)_n$ est décroissante), et comme les F_N sont tous fermés, alors y appartient à tous les F_N, c'est-à-dire à leur intersection, qui est donc non vide. Pour voir que c'est un singleton, on utilise le fait que la suite des diamètres tend vers zéro : si $z \in \bigcap F_n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $y, z \in F_n$, donc $||y - z|| \leq \text{diam}(F_n) \to 0$. Donc $y = z$.

5. La suite $(x_n)_n$ construite précédemment est par définition à valeurs dans la suite de fermés $(\overline{B}(x_n, r_n))_n$, et celle-ci est décroissante car elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap \Omega_{n+1} \subset B(x_n, r_n) \subset \overline{B}(x_n, r_n)$$

Enfin, comme $r_n \to 0$, la suite des diamètres de ces fermés tend vers zéro. Par la question précédente, l'intersection de toutes ces boules fermées est non vide. Or, on a les inclusions

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_n, r_n) \subset \overline{B}(x_0, r_0) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap \Omega_n) \subset (U \cap \Omega_0) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (U \cap \Omega_n) = U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$$

D'où la densité de $\bigcap \Omega_n$.