Colles MP1

Jad ABOU YASSIN

1 décembre 2022

Réduction des endomorphismes

Table des matières

Questions de cours **2**
Exercice 1 - Polynôme minimal 2
Exercice 2 - Lemme de décomposition des noyaux 2
Exercice 3 - Décomposition de Dunford 2

Exercices **2**
Exercice 4 - (*) Tout endomorphisme réel admet une droite ou un plan stable 2
Exercice 5 - (**) Théorème de Cayley-Hamilton dans le cas cyclique 2
Exercice 6 - (**) Endomorphisme de dérivation 3
Exercice 7 - (**) Crochet de Lie de matrices 3
Exercice 8 - (**) Diagonale de a sur un parterre de b 4
Exercice 9 - (**) Matrices circulantes et suite de polygones 4
Exercice 10 - (***) Réduction de Frobenius 5

Questions de cours

Exercice 1 - Polynôme minimal (solution 👉)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{E}$. Définissez le polynôme minimal de u (montrez l'existence et l'unicité). Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, par quoi peut-on majorer le degré de π_u ?

Si $E = F \oplus G$ et u stabilise F, quelle relation a-t-on entre π_u et $\pi_{u_{|F}}$? Peuvent-ils être égaux si $G \neq \{0\}$?

Si on a une matrice diagonale par blocs, quel est son polynôme minimal par rapport à ceux des blocs diagonaux ?

Exercice 2 - Lemme de décomposition des noyaux (solution 👉)

Énoncez et démontrez le lemme de décomposition des noyaux. Utilisez-le pour (re)-démontrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si π_u est scindé à racines simples.

Exercice 3 - Décomposition de Dunford (solution 👉)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé. Montrez qu'il existe d un endomorphisme diagonalisable, n un endomorphisme nilpotent tels que :

- $u = d + n$
- $dn = nd$

Exercices

Exercice 4 - (*) Tout endomorphisme réel admet une droite ou un plan stable (solution 👉)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrez que u admet une droite ou un plan stable.

Exercice 5 - (**) Théorème de Cayley-Hamilton dans le cas cyclique (solution 👉)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

1. Calculez la matrice de u dans la base $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ en fonction de l'écriture de $u^n(x)$ dans cette base. En déduire χ_u
2. Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, montrez que $\chi_u(u) = 0$.
3. Montrez qu'en fait, $\pi_u = \chi_u$.

Exercice 6 - (**) Endomorphisme de dérivation (solution)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{C})$ et $D : E \to E$ l'application de dérivation : $D(f) = f'$

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que $D \in \mathcal{L}(E)$
2. D est-elle injective ? Surjective ? Précisez son noyau et son image
3. Montez que D n'a pas de polynôme minimal (ou alors, que c'est 0 si on accepte 0 comme étant un polynôme minimal)
4. Montrer que $\sigma(D) = \mathbb{C}$, précisez pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ
5. En déduire que la famille $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est une famille libre de E. Est-ce que c'est une base de E ?

Exercice 7 - (**) Crochet de Lie de matrices (solution)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} ad(A) : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & B & \mapsto & AB - BA \end{array}$$

1. Montrez que $ad(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.
2. Montrez que si A est diagonalisable, alors $ad(A)$ est diagonalisable, et calculez ses valeurs propres.
   Indication : Calculer $ad(A)(E_{i,j})$
3. Montrez que si A n'a qu'une seule valeur propre, alors $ad(A)$ est nilpotente.
   Indication : On pourra écrire $ad(A) = L(A) - R(A)$ où $L(A)(B) = AB$ et $R(A)(B) = BA$
4. Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $ad(A) \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$?

Exercice 8 - (**) Diagonale de a sur un parterre de b (solution ☟)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in K^* \times K$, on définit la matrice suivante :

$$A_n(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

- Méthode 1 :
  1. On suppose dans un premier temps que $a = b$. Montrez que $\dim(E_0(A_n(a,a))) = n-1$ et que $\dim(E_{na}(A_n(a,a))) = 1$.
  2. En déduire que $\chi_{A_n(a,a)} = X^{n-1}(X - na)$, puis que $A_n(a,a)$ est diagonalisable. Explicitez les matrices de passage.
  3. On revient dans le cas général a, b quelconques. Calculez les sous-espaces propres de $A_n(a,b)$ et montrez que $\chi_{A_n(a,b)} = (X - (a-b))^{n-1}(X - (a + (n-1)b))$. À quelle condition sur a et b $A_n(a,b)$ est-elle inversible ?
  4. En déduire que $A_n(a,b)$ est diagonalisable et diagonalisez explicitement $A_n(a,b)$, puis en déduire une formule explicite pour $A_n(a,b)^k$, si $k \in \mathbb{N}$.
- Méthode 2 :
  1. Faire les trois premières questions de l'exercice 9 ☟
  2. En déduire que $A_n(a,b)$ est diagonalisable et calculez ses valeurs propres. À quelle condition $A_n(a,b)$ est-elle inversible ?
  3. Quel est le polynôme minimal de $A_n(a,b)$?

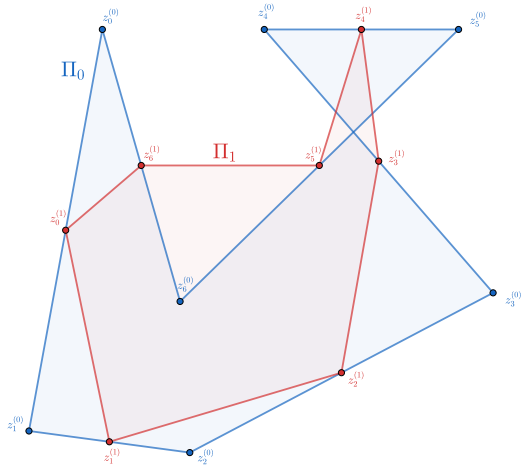
Exercice 9 - (**) Matrices circulantes et suite de polygones (solution ☟)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On note A la matrice suivante, qu'on appelle matrice circulante associée à $(a_1, \dots, a_n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_2 & a_3 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Soit J la matrice circulante associée à $(0, 1, 0, \dots, 0)$. Calculez J^k pour $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire que $A = P(J)$ où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.
2. Calculez χ_J. En déduire que J est diagonalisable de valeurs propres $\sigma(J) = \{e^{\frac{2i\pi k}{n}} \ ; \ 0 \leq k \leq n-1\}$. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
3. En déduire que A est diagonalisable de valeurs propres $P(\omega^k)$ pour $0 \leq k \leq n-1$
4. Application : Soit $\Pi = (z_0, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ un polygone. On indice les sommets par des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de sorte à avoir $z_n = z_0$. On pose la suite de polygone suivante :

$$\begin{cases} \Pi_0 = (z_0^{(0)}, \dots, z_{n-1}^{(0)}) = \Pi \\ \Pi_k = (z_0^{(k)}, \dots, z_{n-1}^{(k)}) = \left(\dfrac{z_0^{(k-1)} + z_1^{(k-1)}}{2}, \dots, \dfrac{z_{n-1}^{(k-1)} + z_n^{(k-1)}}{2} \right) \end{cases}$$



Montrez que la suite $(\Pi_n)_n$ converge vers $g(1, 1, \dots, 1)$ où $g \in \mathbb{C}$. Montrer qu'en fait, g est l'isobarycentre de Π, c'est-à-dire que

$$g = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} z_i$$

Exercice 10 - (***) Réduction de Frobenius (solution ☝)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul.

1. Soit $x \in E$. On pose $\pi_{u,x}$ l'unique polynôme unitaire engendrant l'idéal

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \ ; \ P(u)(x) = 0\}$$

Montrez que $\pi_{u,x}|\pi_u$, puis montrez qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$. On dit qu'un tel vecteur est u-cyclique.

Indication : *Utilisez le lemme de décomposition des noyaux*

2. Soit x un vecteur u-cyclique, et $d = \deg(\pi_u)$. Montrez que $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ est une base de $\mathrm{Vect}(\{u^i(x)\ ;\ i \in \mathbb{N}\}) =: F$. Explicitez la matrice de $u_{|F}$ dans la base précédente. Quel est le polynôme minimal de $u_{|F}$? Et son polynôme caractéristique ?

3. On dit qu'un endomorphisme v est cyclique si $\pi_v = \chi_v$. Montrez que s'il existe toujours un supplémentaire de F stable par u, alors on a une décomposition de E en somme directe d'espaces stables par u

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$$

où pour tout $1 \leq i \leq r-1$, $\pi_{u_{|F_{i+1}}}|\pi_{u_{|F_i}}$ et $u_{|F_i}$ est cyclique pour tout $1 \leq i \leq r$.

4. On prouve maintenant qu'il existe un supplémentaire de F stable par u. On note $(e_1, \dots, e_d)$ la famille libre $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ qu'on complète en $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On pose $G = \{y \in E\ ;\ \forall i \in \mathbb{N},\ e_d^* \circ u^i(y) = 0\} = \Gamma^\circ$ où $\Gamma = \{e_d^* \circ f\ ;\ f \in LE\}$. Montrez que G est un sous-espace de E stable par u, puis que $F \oplus G = E$.

Indication : *Pour montrer que $F + G = E$, on pourra montrer que l'application $\mathbb{K}[u] \to$ Vect(Γ) définie par $P(u) \mapsto e_k^* \circ P(u)$ est surjective*

Solutions des exercices

Solution 1 - Polynôme minimal (☞ exercice)
L'ensemble $I = \{P \in \mathbb{K}[X] \ ; \ P(u) = 0\}$ est le noyau du morphisme d'algèbres $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$, c'est donc un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Or, $\mathbb{K}[X]$ est principal donc il existe un polynôme π, unique à multiplication par un élément de $\mathbb{K}^*$ près, tel que $\pi\mathbb{K}[X] = I$. Or, $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie et $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie n^2, donc ce morphisme d'algèbres n'est pas injectif, donc I n'est pas l'idéal nul. Ainsi, π n'est pas le polynôme nul, et si on choisit π unitaire, alors ce dernier est unique. On le note π_u et on l'appelle le polynôme minimal de u.

Le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $\deg(\pi_u) \leq n$, mais on a quand même une majoration du degré du polynôme minimal sans ce théorème. En effet, la famille $(id, u, u^2, \dots, u^{n^2})$ de $\mathcal{L}(E)$ est de cardinal $n^2 + 1$ dans un espace de dimension n^2, elle est donc liée. Ainsi, il existe un polynôme P de degré au plus n^2 tel que $P(u) = 0$, donc multiple de π_u. Ainsi, $\deg(\pi_u) \leq n^2$.

Si u stabilise F, alors on a $\pi_u(u_{|F}) = \pi_u(u)_{|F} = 0$, donc par définition du polynôme minimal, $\pi_{u_{|F}} | \pi_u$. On peut avoir égalité même si G n'est pas trivial, par exemple en prenant v un endomorphisme de E et u l'endomorphisme de $E \oplus E$ défini par $u_{|E} = v$.

Si A est une matrice diagonale par blocs $A_1, \dots, A_r$, alors $\pi_A = \text{ppcm}(\pi_{A_1}, \dots, \pi_{A_r})$. En effet, $P(A) = 0$ si et seulement si (calcul par blocs) $P(A_i) = 0$ pour tout i, donc si et seulement si $\pi_{A_i} | P$ pour tout i, donc si et seulement si $\text{ppcm}(\pi_{A_1}, \dots, \pi_{A_r}) | P$.

Solution 2 - Lemme de décomposition des noyaux (☞ exercice)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On écrit

$$P = \prod_{i=1}^{r} P_i$$

où les P_i sont premiers entre eux deux à deux. Alors on a :

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(u))$$

Démontrons le théorème. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $P = P_1 P_2$. On utilise une relation de Bézout entre P_1 et P_2 qui sont premiers entre eux. On a Q_1, Q_2 des polynômes tels que $1 = P_1 Q_1 + P_2 Q_2$. Si $x = y + z \in \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u))$, alors clairement $x \in \ker(P(u))$ car $P(u)(x) = P_1(P_2(u)(z)) + P_2(P_1(u)(y)) = 0 + 0 = 0$.

Réciproquement, si $x \in \ker(P(u))$, alors la relation de Bézout précédente donne $id = P_1(u)Q_1(u) + P_2(u)Q_2(u)$, donc $x = Q_1(u)P_1(u)(x) + Q_2(u)P_2(u)(x) = y + z$. Or, $P_2(u)(y) = Q_1(u)P(u)(x) = 0$ et $P_1(u)(z) = Q_2(u)P(u)(x) = 0$. Donc $x \in \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u))$.

Il reste à voir que cette somme est directe : si $x \in \ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u))$, alors par la relation de Bézout, $x = Q_1(u)P_1(u)(x) + Q_2(u)P_2(u)(x) = 0$. D'où le lemme de décomposition des noyaux.

Si π_u est scindé à racines simples, disons $\pi_u = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_r)$, alors par le lemme de décomposition des noyaux, on a :

$$E = \ker(\pi_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u - \lambda_i id) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$$

est une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables sur lesquels u est une homothérie. En concaténant des bases (quelconques) de chaque $E_{\lambda_i}(u)$, on obtient une base de diagonalisation de u, donc u est diagonalisable.

Réciproquement, si u est diagonalisable, alors il existe une base de diagonalisation de E. En regroupant ces vecteurs propres par la valeur de leur valeur propre, on obtient une décomposition de E en somme de sous-espaces propres, et sur chaque sous-espace propre u agit comme une homothétie. Ainsi, le polynôme $\prod_{\lambda\in\sigma(u)} X - \lambda$ annule u, donc c'est un multiple de π_u. Comme il est scindé à racines simples, π_u l'est également.

Solution 3 - Décomposition de Dunford (☞ exercice)
Comme χ_u est scindé, alors par le lemme de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on a une décomposition de E en sous-espaces caractéristiques :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker((u - \lambda_i id)^{m_i})$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de u et m_i des entiers strictement positifs.

Sur chaque $\ker((u - \lambda_i id)^{m_i})$, qu'on note $E^{\lambda_i}(u)$ et qu'on appelle sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i, la restriction de u est somme d'une homothétie de rapport λ_i et d'un endomorphisme nilpotent. On a donc une base de $E^{\lambda_i}(u)$ dans laquelle la matrice de la restriction de u est de la forme $\lambda_i I_{n_i} + N_i$ où N_i est une matrice nilpotente. Ainsi, en concaténant ces bases, on a la matrice de u :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} + N_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r I_{n_r} + N_r \end{pmatrix}$$

On note D la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$ et N la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(N_1, \dots, N_r)$. Si A est la matrice de u dans la base considérée précédemment, on a alors $A = D + N$ et $DN = ND$ (par un calcul par blocs immédiat).

Donc en notant d l'endomorphisme associé à D et n celui associé à N, on a $u = d + n$ et

$dn = nd$.

Solution 4 - (*) Tout endomorphisme réel admet une droite ou un plan stable (☞ exercice)

Le polynôme minimal de u est un polynôme à coefficients réels, donc il s'écrit en produit de polynômes de degrés 1 ou 2 :

$$\pi_u = \prod_{i=1}^{r} P_i \prod_{j=1}^{s} Q_j$$

où $P_1, \ldots, P_r$ sont des polynômes réels de degré 1 et $Q_1, \ldots, Q_s$ sont des polynômes réels de degré 2. Distinguons deux cas :

- il existe un facteur de degré 1 dans π_u. Alors u admet une valeur propre, donc une droite stable.
- tous les facteurs de π_u sont de degré 2. On en prend un, qu'on note $P = X^2 - \alpha X - \beta$. On a alors $\pi_u = PQ$ pour un certain Q. Alors $\ker(P(u))$ est un sous-espace de E stable par u et il est de dimension au plus 2 car pour tout $x \in \ker(P(u))$, $P(u)(x) = 0$ donc $u^2(x) = \alpha u(x) + \beta x$ est combinaison linéaire d'éléments de $\ker(P(u))$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\ker(P(u))$ n'est pas l'espace trivial. C'est le cas si et seulement si $P(u)$ est inversible, donc si et seulement si $\pi_u(u) = Q(u) = 0$, donc si et seulement si π_u divise Q. Ce qui est faux, car Q divise strictement π_u (P est de degré 2). Donc $P(u)$ n'est pas inversible et son noyau est non trivial, donc c'est une droite ou un plan, et il est stable par u.

Solution 5 - (**) Théorème de Cayley-Hamilton dans le cas cyclique (☞ exercice)

1. Si $i \in [\![0, n-2]\!]$, on a $u(u^i(x)) = u^{i+1}(x)$, et $u(u^{n-1}(x)) = u^n(x) \in E$ s'écrit

$$u^n(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}(x)$$

La matrice de u dans cette base est alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On a alors, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned}
\chi_u &= \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & X & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & X & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & X-a_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= (X-a_{n-1})X^{n-1} + (-1)(-a_{n-2})(-1)X^{n-2} + (-a_{n-3})(-1)^2X^{n-3} + \dots \\
&\quad \dots + (-1)^{n+2}(-a_1)(-1)^{n-2}X + (-1)^{n+1}(-a_0)(-1)^{n-1} \\
&= X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0
\end{aligned}$$

2. Un endomorphisme étant entièrement déterminé par son image sur une base, il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\chi_u(u)(u^i(x)) = 0$. D'abord, on a

$$\chi_u(u)(x) = u^n(x) - a_{n-1}u^{n-1}(x) - \dots - a_1u(x) - a_0x = 0$$

par définition des a_i. Ensuite, si $i > 0$,

$$\chi_u(u)(u^i(x)) = (\chi_u(u) \circ u^i)(x) = (u^i \circ \chi_u(u))(x) = u^i(\chi_u(u)(x)) = u^i(0) = 0$$

Donc $\chi_u(u)$ est bien l'endomorphisme nul.

3. Comme la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre, alors pour tout polynôme non nul P de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a $P(u)(x) \neq 0$. Ainsi, pour tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$, $P(u) \neq 0$. Donc le polynôme minimal de u est au moins de degré n. Mais χ_u est un polynôme annulateur de u de degré n. Les deux étant unitaires, et par unicité du polynôme minimal, $\pi_u = \chi_u$.

Solution 6 - (**) Endomorphisme de dérivation (☞ exercice)

1. Oui (juste appliquer les définitions d'un espace vectoriel et d'une application linéaire)
2. Non : $D(0) = D(1) = 0$. D'ailleurs, son noyau est justement l'ensemble des fonctions constantes. Par contre, D est surjective, toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'écrit $D(x \mapsto \int_0^x f(t)dt)$.
3. Montrons que l'idéal annulateur de D est trivial, ce qui signifie que D n'a pas de polynôme minimal. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est non nul, soit a_i sont premier coefficient non nul en partant de a_0 le

coefficient constant. Alors $P(D)(x \mapsto x^i) = i!a_i \neq 0$. Donc $P(D) \neq 0$, donc l'idéal annulateur de D est trivial.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors les fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ vérifient $D(f) = \lambda f$. Ce sont donc des vecteurs propres de D, chacun associé à la valeur propre λ. Donc $\sigma(D) = \mathbb{C}$.
5. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distincts est libre, donc cette famille est libre. Ce n'est pas une base de E car l'identité $x \mapsto x$ n'est pas dans le vect de cette famille. En effet, si $f(x) = x$ est l'identité, on a $D(f) \neq 0$ et $D(D(f)) = 0$, mais toute combinaison linéaire non constante de fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ a toutes ses dérivées non nulles, et une combinaison linéaire constante de telles fonctions a pour dérivée nulle.

Solution 7 - (**) Crochet de Lie de matrices (☞ exercice)

1. C'est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par linéarité de la multiplication et de la somme matricielle.
2. Commençons par le cas diagonale : $A = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors un calcul montre que $ad(A)(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$. Ainsi, $ad(A)$ est diagonale dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc est diagonalisable. Si A est diagonalisable, on considère pour tout $P \in GL_n(\mathbb{C})$ l'application $C(P) : B \mapsto PBP^{-1}$. Soit P inversible telle que $PAP^{-1} = D$ est une matrice diagonale. On montre que $C(P)ad(A)C(P)^{-1} = ad(D)$ qui est diagonale par ce qui précède, donc $ad(A)$ est diagonalisable. De plus, $\sigma(ad(A)) = \{\lambda - \mu \ ; \ \lambda, \mu \in \sigma(A)\}$.
3. Commençons par le cas où la seule valeur propre de A est 0, c'est-à-dire que A est nilpotente (car $\chi_A = X^n$ et le théorème de Cayley-Hamilton). On écrit $ad(A) = L(A) - R(A)$ où $L(A)(B) = AB$ et $R(A)(B) = BA$. Ce sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifient $L(A^k) = L(A)^k$ et $R(A^k) = R(A)^k$. De plus, $L(A)$ et $R(A)$ commutent par associativité de la multiplication matricielle, donc par la formule du binôme de Newton,

$$ad(A)^{2n} = (L(A) - R(A))^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} L(A)^k R(A)^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} L(A^k)R(A^{2n-k}) = 0$$

En effet, chaque terme est nul car k ou $2n - k$ est supérieur ou égal à n, et $A^n = 0$. Donc $ad(A)$ est nilpotente.

Maintenant, si A n'a qu'une seule valeur propre, disons λ, alors $A - \lambda I_n$ n'a qu'une seule valeur propre, zéro, donc elle est nilpotente. Par ce qui précède, $ad(A - \lambda I_n)$ est nilpotente. Or, pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$ad(A - \lambda I_n)(B) = (A - \lambda I_n)B - B(A - \lambda I_n) = AB - BA - \lambda B + \lambda B = ad(A)(B)$$

Donc $ad(A - \lambda I_n) = ad(A)$, donc $ad(A)$ est nilpotente.

4. La réponse est non : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $ad(A)(I_n) = 0$. Donc $ad(A)$ n'est jamais inversible.

Solution 8 - (**) Diagonale de a sur un parterre de b (☞ exercice)

- Méthode 1 :

1. On remarque que les vecteurs :

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de $A_n(a,a)$ associés à la valeur propre 0. De plus, ils forment une famille libre de K^n. Donc $\dim(E_0(A_n(a,a))) \geq n-1$. Or, on remarque également que le vecteur $X_1 = {}^t(1,\ldots,1)$ est vecteur propre de $A_n(a,a)$ pour la valeur propre na. Donc $\dim(E_{na}(A_n(a,a))) \geq 1$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de $A_n(a,a)$ est au plus $n = \dim(K^n)$, alors 0 et na sont les seules valeurs propres de $A_n(a,a)$ et on a égalité : $\dim(E_0(A_n(a,a))) = n-1$ et $\dim(E_{na}(A_n(a,a))) = 1$.

Remarque : Ici, j'utilise beaucoup de « on remarque que », mais il faut voir que c'est effectivement le cas : multiplier à droite par un vecteur colonne revient à effectuer la combinaison linéaire des colonnes de la matrice associée aux coefficients du vecteur. Ainsi, on voit aisément que sommer toutes les colonnes, c'est-à-dire multiplier la matrice par ${}^t(1,\ldots,1)$, renvoie un vecteur proportionnel à ${}^t(1,\ldots,1)$ par exemple.

2. La dimension algébrique d'une valeur propre étant supérieure à sa dimension géométrique, on a $X^{n-1}(X-na)|\chi_{A_n(a,a)}$. Or, $\chi_{A_n(a,a)}$ est un polynôme unitaire de degré n, de même pour $X^{n-1}(X-na)$. Donc on a égalité : $\chi_{A_n(a,a)} = X^{n-1}(X-na)$.

Ainsi, la dimension algébrique et la dimension géométrique des valeurs propres de $A_n(a,a)$ coïncident, donc $A_n(a,a)$ est diagonalisable, semblable à la matrice $D =$

$\mathrm{diag}(na, 0, \dots, 0)$ dans la base $(X_1, \dots, X_n)$. Ainsi, on a $PA_n(a,a)P^{-1} = D$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -(n-1) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -(n-1) & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -(n-1) \end{pmatrix}$$

Pour obtenir P^{-1}, on peut par exemple écrire les vecteurs de la base canonique dans la base $(X_1, \dots, X_n)$ (ce n'est pas difficile).

3. On a $A_n(a,b) = (a-b)I_n + A_n(b,b)$. Ainsi, λ est valeur propre de $A_n(b,b)$ si et seulement si $a - b + \lambda$ est valeur propre de $A_n(a,b)$.
   Remarque : Attention, c'est faux dans le cas général, les valeurs propres d'une somme de matrice n'est pas la somme des valeurs propres de ces matrices ! Ici, c'est vrai parce qu'on travaille avec une homothétie. De plus, les espaces propres sont les mêmes, plus précisément : $E_0(A_n(b,b))) = E_{a-b}(A_n(a,b))$ et $E_{nb}(A_n(b,b)) = E_{a+(n-1)b}(A_n(a,b))$. Donc $\chi_{A_n(a,b)} = (X - (a-b))^{n-1}(X - (a + (n-1)b))$.
   Enfin, $A_n(a,b)$ est inversible si et seulement si $\chi_{A_n(a,b)}(0) \neq 0$, c'est-à-dire $a \neq b$ et $a \neq (1-n)b$.

4. Ainsi, les multiplicités algébriques et géométriques des valeurs propres de $A_n(a,b)$ coïncident, donc $A_n(a,b)$ est diagonalisable. En fait, la même matrice P diagonalise $A_n(a,b)$, car elle commute avec $(a-b)I_n$. On a donc :

$$PA_n(a,b)P^{-1} = \mathrm{diag}(a + (n-1)b, a - b, \dots, a - b)$$

   En particulier, si $k \in \mathbb{N}^*$, et en notant $\lambda_1 = a + (n-1)b$ et $\lambda_2 = a - b$, on a :

$$A_n(a,b)^k = P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_2^k)P = \dots = \frac{1}{n}A_n(\lambda_1^k + (n-1)\lambda_2^k,\ \lambda_1^k - \lambda_2^k)$$

- Méthode 2 :

1. On renvoie à la solution 9 .
2. $A_n(a,b)$ est une matrice circulante associée à la famille $(a, b, \dots, b)$, elle est donc diagonalisable par ce qui précède de valeurs propres $P(\omega)$ où $\omega \in \mathbb{U}_n$ et $P = a + b(X + X^2 + \dots + X^{n-1})$. On a :
   ▷ Si $\omega = 1$, alors $P(\omega) = a + (n-1)b$

▷ Si $\omega \neq 1$, alors $\omega^{n-1} = \omega^{-1} \neq 1$. Or, $P = a + bX\dfrac{X^{n-1}-1}{X-1}$, donc

$$P(\omega) = a + b\omega\frac{\omega^{-1}-1}{\omega-1} = a + b\frac{1-\omega}{\omega-1} = a - b$$

Ainsi, les valeurs propres de $A_n(a,b)$ sont $a+(n-1)b$ et $a-b$, et on a :

$$A_n(a,b) \sim \mathrm{diag}(a+(n-1)b, a-b, \ldots, a-b)$$

La matrice $A_n(a,b)$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de $A_n(a,b)$, donc elle est inversible si et seulement si $a \notin \{b, -(n-1)b\}$

3. Comme $A_n(a,b)$ est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples. Par le théorème de Cayley-Hamilton, il divise $\chi_{A_n(a,b)} = (X-(a+(n-1)b))(X-(a-b))^{n-1}$, et comme les valeurs propres de $A_n(a,b)$ sont racines du polynôme minimal, alors il s'agit de $\pi_{A_n(a,b)} = (X-(a+(n-1)b))(X-(a-b))$.

Solution 9 - (**) Matrices circulantes et suite de polygones (☞ exercice)

1. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a $Je_i = e_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ (où $e_{n+1} = e_1$). Ainsi, $J^k e_i = e_{i+k}$ (encore une fois, « modulo n »), donc J^k est la matrice circulante associée à $e_k = (0, \ldots, 0, \underset{k}{1}, 0, \ldots, 0)$. En particulier, on remarque que $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = P(J)$
2. De ce qui précède, la famille $(J^0, \ldots, J^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et on a que $J^n = I_n$, donc $X^n - 1$ est le polynôme minimal de J. Or, il est de degré n, donc par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_J = X^n - 1$. En particulier, J est diagonalisable de valeurs propres ω^k, $0 \leq k \leq n-1$ (racines n-ièmes de l'unité)
   Remarque : en fait, $J = {}^tC_{X^n-1}$ est une (transposée d'une) matrice compagnon du polynôme X^n-1, donc on a directement $\chi_J = X^n - 1 = \pi_j$ si on connait un peu les matrices compagnons, voir l'exercice 5 ☜
3. Les J^k sont donc tous diagonalisables via les mêmes matrices de passage (car $QJ^kQ^{-1} = (QJQ^{-1})^k$). On a alors :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad QJ^kQ^{-1} = \mathrm{diag}(\omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{(n-1)k})$$

Donc en multipliant par a_k et en sommant :

$$QP(A)Q^{-1} = \mathrm{diag}(P(\omega), \ldots, P(\omega^{n-1}))$$

Donc $P(A)$ est diagonalisable de valeurs propres $P(\omega^k)$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

4. Modélisons notre problème : on remarque que $\Pi_k = A\Pi_0$ où A est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

qui est la matrice circulante associée à la famille de taille n $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$. Par l'étude précédente sur les matrices circulantes, on obtient que les valeurs propres de A sont les $P(\omega^k)$ où $0 \leq k \leq n-1$ et $P = \dfrac{X+1}{2}$. On note $\mu_k = \dfrac{\omega^k + 1}{2}$. On a alors $A^k = Q\text{diag}(\mu_0^k, \dots, \mu_{n-1}^k)Q^{-1}$ pour une certaine matrice inversible Q.

Or, si $k > 0$, $|\mu_k| < 1$, en effet, on a $|\mu_k| \leq 1$ par inégalité triangulaire, avec égalité si et seulement si ω^k est positivement colinéaire à 1, c'est-à-dire si et seulement si $\omega^k = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $k = 0$. Ainsi, on a

$$\text{diag}(\mu_0^k, \dots, \mu_{n-1}^k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$$

Donc la suite $(A^k)_k$ converge vers $A_\infty = Q\text{diag}(1, 0, \dots, 0)Q^{-1}$ qui est une matrice de rang 1. Or, le vecteur $X = {}^t(1, 1, \dots, 1)$ vérifie $A^k X = X$ pour tout k, donc en passant à la limite, $A_\infty X = X$. Donc X est dans l'image de A_∞ qui est de rang 1, donc l'image de A_∞ est $\mathbb{C}X$. Ainsi, comme la suite $(A^k)_k$ converge, alors la suite $(\Pi_k)_k$ converge, car $\Pi_k = A^k\Pi_0$. On note Π_∞ la limite : $B\Pi_0 = \Pi_\infty$. Donc Π_∞ est dans l'image de B, donc il existe $g \in \mathbb{C}$ tel que $\Pi_\infty = {}^t(g, g, \dots, g)$.

Il reste à voir que g est l'isobarycentre de Π. Pour cela, on remarque que l'isobarycentre de Π_k est le même que celui de Π_{k+1} :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i^{(k)} + z_{i+1}^{(k)}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} z_i^{(k)} + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} z_{i+1}^{(k)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} z_i^{(k)}$$

De plus, l'application $(z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} z_i$ est continue, donc en passant à la limite, on obtient que l'isobarycentre de Π est égal à l'isobarycentre de $(g, g, \dots, g)$, qui vaut g.

Solution 10 - (***) Réduction de Frobenius (☞ exercice)

1. On a $\pi_u(u) = 0$ par définition du polynôme minimal de u, donc $\pi_u(u)(x) = 0$, donc π_u est dans l'idéal engendré par $\pi_{u,x}$, d'où la divisibilité. Notons $\pi_u = \prod_{i=1}^r P_i^{m_i}$ où les P_i sont deux à deux premiers entre eux et irréductibles, et les $m_i > 0$. Par le lemme de décomposition des noyaux, on a une décomposition de E de la forme :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i^{m_i}(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

et chaque sous-espace est stable par u. Montrons que sur chaque E_i, il existe $x_i \in E_i$ tel que $P_i^{m_i} = \pi_{u_{|E_i}} = \pi_{u_{|E_i},x_i}$. Si c'était faux, alors pour tout $x \in E_i$, $\pi_{u_{|E_i},x} = P_i^{k(x)}$ où $k(x) < m_i$. Donc en particulier, pour tout $x \in E_i$, $P_i^{m_i-1}(u_{|E_i})(x) = 0$, donc $P_i^{m_i-1}(u_{|E_i}) = 0$. C'est absurde car le polynôme minimal de $u_{|E_i}$ sur E_i est $P_i^{m_i}$. Donc il existe un vecteur $u_{|E_i}$-cyclique $x_i \in E_i$. On considère maintenant $x = x_1 + \cdots + x_r \in E$. Alors par stabilité de u sur chacun des E_i, on a

$$\begin{aligned} \forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(u)(x) &= P(u)(x_1) + \cdots + P(u)(x_r) \\ &= P(u)_{|E_1}(x_1) + \cdots + P(u)_{|E_r}(x_r) \\ &= P(u_{|E_1})(x_1) + \cdots + P(u_{|E_r})(x_r) \end{aligned}$$

Donc

$$P(u)(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall i \in [\![1, r]\!],\ P(u_{|E_i})(x_i) = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall i \in [\![1, r]\!],\ P_i^{m_i} | P$$

Donc $\pi_{u,x} = \pi_u$.

2. La famille est libre car sinon on aurait un relation de dépendance linéaire entre $(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$, donc un polynôme P de degré au plus $d-1$ non nul tel que $P(u)(x) = 0$, ce qui contredit $\deg(\pi_{u,x}) = d$. Cette famille est génératrice de $\mathrm{Vect}(u^i(x)\ ;\ i \in \mathbb{N})$ car $\mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$ est stable par u puisque $u^d(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$.

   Dans cette base, on a $u_{|F}(u^i(x)) = u(u^i(x)) = u^{i+1}(x)$ pour tout $0 \leq i \leq d-2$, et $u_{|F}(u^{d-1}(x)) = u^d(x) = \sum_{i=0}^{d-1} -a_i u^i(d)$ si $\pi_u = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$. Donc dans cette base, on a :

$$\mathrm{Mat}(u|F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

   Comme la famille $(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$ est libre, alors tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $d-1$ n'annule pas $u_{|F}$ (car évalué en x, on n'obtient pas le vecteur nul). Donc $\deg(\pi_{u_{|F}}) \geq d$. Mais $\dim(F) = d = \deg(\chi_{u_{|F}})$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\pi_{u_{|F}} = \chi_{u_{|F}}$. De plus, le polynôme π_u annule $u_{|F}$ et est de degré d, donc on a $\pi_{u_{|F}} = \chi_{u_{|F}} = \pi_u$.

3. Soit G un supplémentaire de F stable par u (existe par hypothèse). On note $v = u_{|G}$. On a $\pi_u(v) = 0$, donc $\pi_v | \pi_u = \pi_{u_{|F}}$. On a donc $E = F \oplus G$ où F et G sont stables par u et $\pi_{u_{|G}} | \pi_{u_{|F}}$. On conclut par récurrence sur la dimension de E en appliquant l'hypothèse de récurrence à G et v. L'initialisation se fait dans le cas où u est cyclique sur E (la décomposition de E est alors $E = E$)

4. G est stable par u car si $y \in G$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $e_d^* \circ u^i(u(y)) = e_d^* \circ u^{i+1}(y) = 0$. Montrons dans premier temps que $F \cap G = \{0\}$. Soit $y \in F \cap G$. Comme $y \in F$, alors y s'écrit dans la base $(e_1, \ldots, e_d)$:

$$y = y_1 e_1 + \cdots + y_d e_d$$

Comme $y \in G$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $e_d^* \circ u^i(y) = 0$. Pour $i = 0$, on obtient que $y_d = 0$. Pour $i = 1$, on obtient que $y_{d-1} = 0$, ..., pour $i = d - 1$, on obtient que $y_1 = 0$. Donc $y = 0$.

Montrons maintenant que $F + G = E$. On le fait par un argument de dimension. On a $G = \Gamma^\circ = \text{Vect}(\Gamma)^\circ$, donc $\dim(G) = n - \dim(\text{Vect}(\Gamma))$. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[u] & \longrightarrow & \text{Vect}(\Gamma) \\ P(u) & \mapsto & e_d^* \circ P(u) \end{array}$$

Par définition de Γ et de son espace engendré, cette application est surjective. Donc $\dim(\text{Vect}(\Gamma)) \leq \dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u) = d$. Donc $\dim(G) \geq n - d$, et ainsi $\dim(G) + \dim(F) \geq n$. Donc $F + G = E$ (car $F \cap G = \{0\}$). Donc F et G sont en somme directe.