Colles MP1

Jad ABOU YASSIN

22 Septembre 2022

Compléments d'algèbre linéaire

Table des matières

Questions de cours **2**

Exercice 1 - Vrai ou faux sur les endomorphismes diagonalisables. 2

Exercice 2 - Vrai ou faux sur les sous-espaces vectoriels 3

Exercice 3 - Vrai ou faux sur les déterminants 4

Exercices **5**

Exercice 4 - (**) Un calcul de déterminant 4×4 5

Exercice 5 - (**) Endomorphisme de dérivation 6

Exercice 6 - (**) Diagonale de a sur un parterre de b 7

Exercice 7 - (**) Crochet de Lie nilpotent 8

Questions de cours

Exercice 1 - Vrai ou faux sur les endomorphismes diagonalisables.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, où $\mathbb{K}$ est un corps, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Quelles propositions suivantes sont vraies ? (si une équivalence est fausse, dire s'il y a un des sens qui est vrai)

1. La matrice de u dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unique.
2. u est diagonalisable si et seulement si il existe une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $Mat_e(u)$ soit une matrice diagonale
3. u est diagonalisable si et seulement si pour toute base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E, $Mat_e(u)$ soit une matrice diagonale
4. u est diagonalisable si et seulement si u a n valeurs propres distinctes
5. Si u est diagonalisable, alors u est inversible.
6. Si $E = F \oplus G$ où u stabilise F et G, alors : u est diagonalisable si et seulement si $u_{|F}$ et $u_{|G}$ sont diagonalisables.

Solution :

1. Faux. La « matrice de u »n'a pas de sens, elle n'est définit qu'après avoir choisi une base de E, et dans le cas général, la matrice de u dans une base est différente de la matrice de u dans une autre base.
2. Vrai. C'est une définition de la diagonalisabilité d'un endomorphisme.
3. Faux. Le sens réciproque est vrai (c'est un cas particulier de la question précédente), mais le sens direct est faux. Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme défini par $u((1,0)) = (1,0)$ et $u((0,1)) = (0,2)$ est diagonalisable, car sa matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est diagonale. Mais dans la base $(e_1, e_1 + e_2)$, sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonale.
4. Faux. La réciproque est vraie. En effet, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes de u. Soient alors $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs propres (non nuls) associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. La famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, car c'est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Comme elle est de taille $n = \dim(E)$, alors c'est une base de E. Dans cette base, on a par définition : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u(v_i) = \lambda_i v_i$. Donc u est diagonalisable. Mais le sens direct est faux. En effet, l'identité (pou $n \geq 2$) est diagonalisable (car diagonale dans une base), mais n'admet qu'une seule valeur propre (1).
5. Faux. La matrice nulle est diagonalisable mais pas inversible.

6. Vrai. La matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $F \oplus G$ est diagonale par blocs. Si chaque bloc est diagonalisable, en concaténant les bases, u l'est. Réciproquement, si u est diagonalisable, on a une décomposition de l'espace ...

Exercice 2 - Vrai ou faux sur les sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K}$ est un corps. Quelles propositions suivantes sont vraies ? (si une équivalence est fausse, dire s'il y a un des sens qui est vrai)

1. Si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie.
2. Si F est un espace vectoriel, et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\mathrm{im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de F et $\ker(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E
3. Si F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E, si $E = F \oplus G = F \oplus H$, alors $G = H$.
4. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cup G$ et $F \cap G$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
5. Si F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E, si E est de dimension finie et $E = F \oplus G$, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$
6. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors : $E = F \oplus G$ si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$
7. Si $(F_1, \ldots, F_k)$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, alors : $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$ si et seulement si $E = F_1 + \cdots + F_k$ et $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq k$.
8. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, et si E est de dimension finie, alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
9. Question de culture (n'a aucun impact sur la note) : peut-on trouver un analogue de la formule du crible de Poincaré $\dim(F_1 + \cdots + F_k)$?

Solution :

1. Vrai. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors toute famille d'éléments de F de taille $\dim(E) + 1$ est liée (car c'est aussi une famille d'éléments de E de taille $\dim(E) + 1$). Donc F est de dimension finie au plus $\dim(E)$.
2. Vrai. C'est du cours. On vérifie les axiomes définissant un sous-espace vectoriel aisément en utilisant la linéarité de φ.
3. Faux. Prendre $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}((1, 0))$, $G = \mathrm{Vect}((0, 1))$ et $H = \mathrm{Vect}((1, 1))$. Alors $E = F \oplus G$ et $E = F \oplus H$, mais $G \neq H$.

4. Faux pour l'union, vrai pour l'intersection. L'union de deux droites distinctes d'un plan n'est pas un sous-espace vectoriel du plan.
5. Vrai. On a toujours $\dim(F+G) \leq \dim(F) + \dim(G)$ avec égalité si et seulement si $F+G = F \oplus G$
6. Vrai. On utilise la formule de GRASSMANN (cf question 8)
7. Faux. Le contre-exemple de la question 3 fonctionne : on a $E = F+G+H$ et $F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{0\}$, mais pourtant F, G et H ne sont pas en somme directe. Le sens direct est cependant vrai.
8. C'est la formule de GRASSMANN. Pour la prouver, on considère une base $(e_1, \ldots, e_k)$ de $F \cap G$ qu'on complète d'une part en une base $(e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l)$ de F, et d'autre part en une base $(e_1, \ldots, e_k, g_1, \ldots, g_m)$ de G. On vérifie ensuite que la famille $(e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l, g_1, \ldots, g_m)$ est une base de $F+G$ (c'est pas dur). Donc $\dim(F+G) = k+l+m = (k+l)+(k+m)-k = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
9. Non. Même si la formule de GRASSMANN ressemble beaucoup à la formule du crible de POINCARÉ dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, la formule du crible de POINCARÉ générale ne se traduit pas en terme de dimension d'une somme de plus de deux sous-espaces vectoriels.

Exercice 3 - Vrai ou faux sur les déterminants

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ et $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ pù E est un espace vectoriel de dimension finie. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors le déterminant de la matrice de u dans la base e dépend de e. (c'est-à-dire que si $f = (f_1, \ldots, f_n)$ est une autre base de E, alors il est possible que le déterminant de la matrice de u dans la base f soit différent du déterminant de la matrice de u dans la base e)
3. Si A est une matrice triangulaire par blocs, alors le déterminant de A est le produit des déterminants de chaque bloc diagonal.
4. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$
5. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $\det(A) = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda$
6. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\det(A)$ est le produit des valeurs propres de A comptées avec multiplicité.
7. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Solution :

1. C'est faux pour la somme et vrai pour le produit. $\det(I_2+I_2)=4$ mais $\det(I_2)+\det(I_2)=2$. Pour le produit, c'est vrai car l'application $B \mapsto \det(AB)$ est une forme n-linéaire alternée en les colonnes de B, donc est proportionnelle à det, et la constante de proportionnalité est $\det(A)$ en évaluant en I_n.
2. C'est faux. Le déterminant ne dépend pas de la base choisie. En effet, un changement de base se traduit matriciellement par une conjugaison, et la multiplicativité du déterminant fait que le déterminant est invariant par conjugaison.
3. C'est vrai grâce à l'égalité
$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_k \end{pmatrix}$$
où $A \in \mathcal{M}_l(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_l(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{l,m}(\mathbb{K})$
4. C'est faux dès que $n \geq 2$. En effet, $\det(2I_n) = 2^n \neq 2$
5. C'est faux dans les deux sens. $2I_n$ est diagonalisable mais $\det(2I_n) = 2^n \neq 2$ (la seule valeur propre de $2I_n$). Réciproquement, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable mais vérifie $\det(A) = 1 = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda$ (la seule valeur propre de A est 1)
6. C'est vrai. C'est du cours normalement, mais je ne sais pas exactement tout ce que vous avez vus. On peut le justifier en disant que comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, toute matrice est trigonalisable, donc le déterminant d'une matrice est le produit des coefficients diagonaux une fois trigonalisée, qui sont ses valeurs propres comptées avec multiplicité.
7. C'est vrai. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\det(AA^{-1}) = 1 = \det(A)\det(A^{-1})$. Donc $\det(A) \neq 0$. Réciproquement, si $\det(A) \neq 0$, alors on pose la matrice $B = \det(A)^{-1}{}^t\mathrm{Com}(A)$. Un calcul donne que $AB = I_n$.

Exercices

Exercice 4 - (**) Un calcul de déterminant 4×4

Calculer $\det(A)$ où :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Indication : *(Orale) Commencer par faire l'algorithme du pivot de* Gauss *pour éliminer la première colonne, puis développez par rapport à la dernière ligne*

Solution : On commence par un pivot de Gauss :

$$\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{3}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{cases} \Rightarrow \det(A) = \det(A') \text{ où } A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{22}{3} & -\frac{14}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{19}{3} \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

En faisant ensuite $L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$, $L_2 \leftarrow 3L_2$, $L_3 \leftarrow 3L_3$ et $L_4 \leftarrow \frac{1}{3}L_4$, on obtient une matrice A'' telle que $\det(A'') = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 \times \frac{1}{3} \det(A') = \det(A)$. On a :

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 22 & -14 & 13 \\ 0 & 4 & -5 & 19 \\ 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice triangulaire par blocs (ou bien on développe par rapport à la première colonne), on obtient ainsi que $\det(A) = \det((1)) \det(B)$ où B est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 22 & -14 & 13 \\ 4 & -5 & 19 \\ \frac{4}{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière colonne, on obtient que

$$\det(B) = \frac{4}{3} \begin{vmatrix} -14 & 13 \\ -5 & 19 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 22 & 13 \\ 4 & 19 \end{vmatrix}$$

On calcule alors les déterminants 2×2, et on obtient que $\det(B) = -\frac{4}{3} \times 201 + 366 = 98$. Donc $\boxed{\det(A) = 1 \times \det(B) = 98}$.

Exercice 5 - (**) Endomorphisme de dérivation

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{C})$ et $D : E \to E$ l'application de dérivation : $D(f) = f'$

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
2. Montrer que $D \in \mathcal{L}(E)$

3. D est-elle injective ? Surjective ? Précisez son noyau et son image
4. Montrer que tout élément de $\mathbb{C}$ est valeur propre de D (ie. $\sigma(D) = \mathbb{C}$), précisez pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ
5. En déduire que la famille $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est une famille libre de E. Est-ce que c'est une base de E ?

Solution :

1. Oui
2. Oui
3. Non : $D(0) = D(1) = 0$. D'ailleurs, son noyau est justement l'ensemble des fonctions constantes. Par contre, D est surjective, toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'écrit $D(x \mapsto \int_0^x f(t)dt)$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors les fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ vérifient $D(f) = \lambda f$. Ce sont donc des vecteurs propres de D, chacun associé à la valeur propre λ. Donc $\sigma(D) = \mathbb{C}$.
5. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distincts est libre, donc cette famille est libre. Ce n'est pas une base de E car l'identité $x \mapsto x$ n'est pas dans le vect de cette famille. En effet, si $f(x) = x$ est l'identité, on a $D(f) \neq 0$ et $D(D(f)) = 0$, mais toute combinaison linéaire non constante de fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ a toutes ses dérivées non nulles, et une combinaison linéaire constante de telles fonctions a pour dérivée nulle.

Exercice 6 - (**) Diagonale de a sur un parterre de b

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on définit la matrice suivante :

$$A_n(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

1. Montrez par récurrence sur $n \geq 2$ que $\det(A_n(a,b)) = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$
   Remarque : On admettra aussi vraie la formule pour $a = 0$
2. Montrez que $\lambda_1 := (a + (n-1)b)$ et $\lambda_2 := a - b$ sont des valeurs propres de $A_n(a,b)$
3. Montrer que $\dim(E_{\lambda_1}(A_n(a,b))) = 1$ et que $\dim(E_{\lambda_2}(A_n(a,b))) = n-1$ en trouvant une base de vecteurs propres pour chacun de ces sous-espaces propres.
4. En déduire que $A_n(a,b)$ est diagonalisable. À quelle matrice diagonale est-elle semblable ?

Solution :

1. Pour $n = 2$, ok. Si $n > 2$, on fait la première étape d'un pivot de Gauss. On obtient :

$$A_n(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ 0 & a-\frac{b^2}{a} & b-\frac{b^2}{a} & \dots & b-\frac{b^2}{a} \\ 0 & b-\frac{b^2}{a} & a-\frac{b^2}{a} & \dots & b-\frac{b^2}{a} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & b-\frac{b^2}{a} & b-\frac{b^2}{a} & \dots & a-\frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

   Donc $\det(A_n(a,b)) = a\det(A_{n-1}(a-\frac{b^2}{a}, b-\frac{b^2}{a}))$. Par HR, on obtient :

$$\begin{aligned} \det(A_n(a,b)) &= a\left(a-\tfrac{b^2}{a}+(n-2)\left(b-\tfrac{b^2}{a}\right)\right)\left(a-\tfrac{b^2}{a}-b+\tfrac{b^2}{a}\right)^{n-2} \\ &= (a^2-(n-1)b^2+(n-2)ab)(a-b)^{n-2} \\ &= (a-b)(a+(n-1)b)(a-b)^{n-2} \\ &= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1} \end{aligned}$$

   D'où l'itération et le résultat.

2. Si $f_1 = {}^t(1,1,\dots,1)$, alors $A_n(a,b)f_1 = (a+(n-1)b)f_1$ donc λ_1 est valeur propre de $A_n(a,b)$. De même, si $f_2 = {}^t(1,-1,0,0,\dots,0)$, alors $A_n(a,b)f_2 = (a-b)f_2$ donc λ_2 est valeur propre de $A_n(a,b)$.

3. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a pour rappel $f_1 = e_1+\dots+e_n$ et $f_2 = e_1-e_2$. On pose alors $f_k = e_1-e_k$ pour $2 \le k \le n$. Il s'agit d'une famille libre (opérations élémentaires sur la famille libre $(e_2,\dots,e_n)$) et on a pour tout $2 \le k \le n$, $A_n(a,b)f_k = (a-b)f_k$. Ainsi, $\dim(E_{\lambda_2}(A_n(a,b))) \ge n-1$, et $\dim(E_{\lambda_1}(A_n(a,b))) \ge 1$. Donc ces inégalités sont des égalités.

4. On a donc une décomposition de E en somme directe de sous-espaces propres de $A_n(a,b)$, donc cette matrice est diagonalisable, et semblable à : $\mathrm{diag}(a+(n-1)b, a-b, a-b, \dots, a-b)$

Exercice 7 - (**) Crochet de Lie nilpotent

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application :

$$\begin{aligned} ad(A): \ \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ B &\mapsto AB-BA \end{aligned}$$

1. Rappelez la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. On pose :

$$L(A): \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ B & \mapsto & AB \end{array} \quad \text{et} \quad R(A): \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ B & \mapsto & BA \end{array}$$

Montrez que $L(A)$ et $R(A)$ sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. En déduire que $ad(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.

3. Montrer que $L(A)$ et $R(A)$ commutent et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $L(A)^k = L(A^k)$ et $R(A)^k = R(A^k)$.
4. En déduire que si A est nilpotente, alors $L(A)$ et $R(A)$ le sont aussi. En déduire que dans ce cas, $ad(A)$ est également nilpotente
5. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer $ad(A - \lambda I_n)$
6. En déduire que si A n'a qu'une seule valeur propre, alors $ad(A)$ est nilpotente.
   Indication : Si le résultat n'a pas encore été vu, on peut admettre qu'une matrice complexe n'ayant que 0 pour valeur propre est nilpotente
7. (plus dur) Que dire de $ad(A)$ si A est diagonale ? Diagonalisable ?

Solution :

1. n^2
2. Oui
3. Oui
4. Oui, binôme de Newton car $L(A)$ et $R(A)$ commutent.
5. C'est $ad(A)$: $ad(A - \lambda I_n)(B) = (A - \lambda I_n)B - B(A - \lambda I_n) = AB - BA - \lambda I_n B + B\lambda I_n = AB - BA$
6. Si A n'a qu'une seule valeur propre λ, alors $A - \lambda I_n$ n'a que 0 comme valeur propre, et est donc nilpotente (par exemple car la seule racine de son polynôme caractéristique est 0 donc X^n annule $A - \lambda I_n$). Par ce qui précède, $ad(A - \lambda I_n)$ est nilpotente, et donc $ad(A)$ aussi car ce sont les mêmes objets.
7. Si A est diagonale, $A = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors un calcul montre que $ad(A)(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$. Ainsi, A est diagonale car les $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si A est diagonalisable, on considère pour tout $P \in GL_n(\mathbb{C})$ l'application $C(P) : B \mapsto PBP^{-1}$. Soit P inversible telle que $PAP^{-1} = D$ est une matrice diagonale. On montre que $C(P)ad(A)C(P)^{-1} = ad(D)$ qui est diagonale par ce qui précède, donc $ad(A)$ est diagonalisable.