Colles CMI L1

Jad ABOU YASSIN

18 novembre 2025
Analyse 2

Table des matières

Questions de cours **2**
Exercice 1 - Limites de fonctions 2
Exercice 2 - Primitives et intégrales 2
Exercice 3 - Intégration par parties 2

Exercices **2**
Exercice 4 - ★★⯪ Polynôme × exponentielle 2
Exercice 5 - ★★⯪ Étude du sinus cardinal 3
Exercice 6 - ★★☆ Intégrales de Wallis 4
Exercice 7 - ★★⯪ Intégrations itérées 4

Questions de cours

Exercice 1 - Limites de fonctions (solution 👉)

Calculer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad f_2(x) = \cos\left(e^{-\sqrt{x}}\right); \quad f_3(x) = \frac{12x^3 - 2x^2 - 6}{(x-4)(6x+2)^2}; \quad f_4(x) = x^2 - x^3 + \ln(x)^{10}$$

Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}; \quad \lim_{x\to 1^+} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right); \quad \lim_{x\to 0} x\sin(\ln(x))$$

Exercice 2 - Primitives et intégrales (solution 👉)

Expliquer comment calculer une primitive d'une fonction f grâce à une intégrale. Trouver une primitive des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f_1(x) = x; \quad f_2(x) = \sin(x) + \cos(x); \quad f_3(x) = \frac{x}{1+x^2}; \quad f_4(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Exercice 3 - Intégration par parties (solution 👉)

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Écrire la formule d'intégration par parties appliquée aux fonctions f et g.

Appliquer la formule pour calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} t\sin(t)dt; \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin(t)dt; \quad I_3 = \int_1^e 1\cdot\ln(t)dt; \quad I_4 = \int_{-1}^1 2t\arctan(t)dt.$$

Indication : Pour I_4, on pourra choisir t^2+1 comme primitive de $2t$

Exercices

★★☆ **Exercice 4 - Polynôme × exponentielle (solution 👉)**

Soit P un polynôme de degré n. On cherche à calculer la primitive de $f_P(x) = P(x)e^x$ notée $F_P(x)$ définie par $F_P(x) = \int_0^x P(t)e^t dt$.

1. Calculer $F_P(x)$ pour $P(X) = 1$, $P(X) = X$ et $P(X) = X^2$.

2. Exprimer $F_P(x)$ en fonction de $F_{P'}(x)$. Émettre une hypothèse pour une formule pour $F_P(x)$.
3. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ (le degré de P) que

$$F_P(x) = e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(k)}(0).$$

4. Application : Calculer $F_{X^6}(x)$ et $F_{3X^2+X-1}(x)$.

★★☆ Exercice 5 - Étude du sinus cardinal (solution 👈)

On veut étudier la fonction $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

1. Donner le domaine de définition de sinc. Calculer $\lim_{x\to 0} \mathrm{sinc}(x)$. Dans tout ce qui suit, on considérera que cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en posant $\mathrm{sinc}(0) = 1$.
2. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ la dérivée $\mathrm{sinc}'(x)$. Pourquoi ne peut-on *a priori* pas calculer la limite quand $x \to 0$ de $\mathrm{sinc}(x)$?
3. Montrer qu'on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathrm{sinc}'(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} + \frac{x - \sin(x)}{x^2}.$$

   Justifier pourquoi $\dfrac{\cos(x) - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Pour l'autre terme, il faudra procéder autrement.
4. Montrer l'égalité suivante :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \cos(t) dt = x - \sin(x).$$

   En déduire l'encadrement, pour $x > 0$ assez petit,

$$0 \leq \frac{x - \sin(x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} \sin(x).$$

5. En déduire que $\frac{x-\sin(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Justifier en utilisant l'imparité de la fonction $x \mapsto \dfrac{x - \sin(x)}{x^2}$ que $\dfrac{x - \sin(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
6. Conclure en calculant $\lim_{x\to 0} \mathrm{sinc}'(x)$.

★★☆ Exercice 6 - Intégrales de Wallis (solution)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$$

1. Calculez W_0 et W_1.
2. Montrez que pour tout $n \geq 2$, $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 1}$$

4. Quelle est la limite de la suite $((2n+1)W_{2n}W_{2n+1})_n$?

★★★ Exercice 7 - Intégrations itérées (solution)

Soit u_0 une fonction positive et continue sur le segment $[0,1]$. On définit par récurrence une suite de fonctions $(u_n)_n$ par $u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t)dt$.

1. Si $u_0(x) = 1$, calculer la suite $(u_n)_n$. Soit $x \in [0,1]$. Quelle est la limite de la suite $u_n(x)$ quand $n \to +\infty$? On note $(v_n(x))_n$ cette suite pour pouvoir la réutiliser dans la suite de l'exercice.
2. Nous allons montrer que l'observation précédente est un fait général. On considère à nouveau u_0 une fonction positive et continue quelconque sur $[0,1]$. On note $M = \max_{[0,1]}(u_0)$ la valeur maximale que prend $u_0(x)$ sur le segment $[0,1]$. Montrer que $u_1(x) \leq xM$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $u_n(x) \leq Mv_n(x)$.
4. Si $x \in [0,1]$, quelle est la limite de la suite $(u_n(x))_n$?
5. Application : prendre $u_0(x) = e^x$. Calculer la suite $(u_n(x))_n$ pour tout $x \in [0,1]$. En déduire l'égalité suivante

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Corrections

Pour les questions de cours, on ne donne que les réponses.

Solution 1 - Limites de fonctions (☞ exercice)

$$f_1(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0; \quad f_2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1; \quad f_3(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{3}; \quad f_4(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0; \quad \lim_{x\to 1^+} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -\infty; \quad \lim_{x\to 0} x\sin(\ln(x)) = 0.$$

Solution 2 - Primitives et intégrales (☞ exercice)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On peut calculer une primitive de f, notée F, grâce à la formule

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On note avec une lettre majuscule les primitives des fonctions f_1 à f_4.

$$F_1(x) = \frac{x^2}{2}; \quad F_2(x) = \sin(x) - \cos(x); \quad F_3(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2); \quad F_4(x) = \arctan(x).$$

Solution 3 - Intégration par parties (☞ exercice)

La formule d'intégration par parties (IPP) est :

$$[f(t)g(t)]_a^b = \int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

On a les valeurs des intégrales suivantes :

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right); \quad I_2 = \frac{1}{2}; \quad I_3 = 1; \quad I_4 = \pi - 2.$$

Solution 4 - Polynôme $\times$ exponentielle (☞ exercice)

1. On calcule :
$$F_1(x) = \int_0^x e^t dt = e^x - e^0 = e^x - 1.$$
Par une IPP, on calcule F_X :
$$F_X(x) = \int_0^x te^t dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - 0 - F_1(x) = xe^x - e^x + 1 = e^x(x-1) + 1.$$
De même pour F_{X^2}.
$$F_{X^2}(x) = \int_0^x t^2 e^t dt = [t^2 e^t]_0^x - 2F_X(x) = x^2 e^x - 0 - 2e^x(x-1) + 2 = e^x(x^2 - 2x + 2) - 2.$$

2. La question précédente nous donne l'intuition qu'une IPP va fonctionner.
$$F_P(x) = \int_0^x P(t)e^t dt = [P(t)e^t]_0^x - \int_0^x P'(t)e^t dt = P(x)e^x - P(0) - F_{P'}(x).$$
Essayons de calculer informellement le résultat pour le montrer par récurrence ensuite.
$$\begin{aligned} F_P(x) &= P(x)e^x - P(0) - F_{P'}(x) \\ &= P(x)e^x - P(0) - (P'(x)e^x - P'(0)) + F_{P''}(x) \\ &= \dots \\ &= P(x)e^x - P(0) - (P'(x)e^x - P'(0)) + \cdots + (-1)^n (P^{(n)}(x)e^x - P^{(n)}(0)). \end{aligned}$$
On s'arrête à $n = \deg(P)$ puisqu'ensuite P est nul et $F_0(x) = 0$.

3. On démontre le résultat par récurrence sur $\mathbb{N}$. L'initialisation découle du calcul de F_1 effectué à la question 1. En effet, on a $F_c(x) = cF_1(x) = ce^x - c$. D'un autre côté, la formule à démontrer donne pour $P = c$ une constante :
$$F_P(x) = e^x P(x) - P(0) = e^x c - c.$$
D'où l'initialisation. Faisons maintenant l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le résultat soit vrai pour tout polynôme Q de degré n. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n+1$. On a d'après la formule de la question 2 :
$$F_P(x) = P(x)e^x - P(0) - F_{P'}(x).$$
Puisque P' est un polynôme de degré $n-1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

On a alors

$$\begin{aligned} F_P(x) &= P(x)e^x - P(0) - \left(e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (P')^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (P')^{(k)}(0) \right) \\ &= P(x)e^x - P(0) + e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} P^{(k+1)}(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} P^{(k+1)}(0) \\ &= P(x)e^x - P(0) + e^x \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k P^{(k)}(x) - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k P^{(k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k P^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k P^{(k)}(0). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

4. D'après la formule précédente, on a :

$$F_{X^6}(x) = e^x(x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720) - 720$$

et

$$F_{3X^2+X-1}(x) = e^x(3x^2 + x - 1 - 6x - 1 + 6) - (-1 - 1 + 6) = e^x(3x^2 - 5x + 4) - 4.$$

Solution 5 - Étude du sinus cardinal (☞ exercice)

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction sinc est définie sur $\mathbb{R}^*$. On a, puisque la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

   En particulier, on peut définir sinc en 0 en lui donnant la valeur 1.

2. Si $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\mathrm{sinc}'(x) = \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}.$$

   Lorsque $x \to 0$, on obtient une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

3. On soustrait et ajoute x au numérateur :

$$\mathrm{sinc}'(x) = \frac{\cos(x)x - x + x - \sin(x)}{x^2} = \frac{\cos(x)x - x}{x^2} + \frac{x - \sin(x)}{x^2} = \frac{\cos(x) - 1}{x} + \frac{x - \sin(x)}{x^2}.$$

   Puisque la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a la limite

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \cos'(0) = -\sin(0) = 0.$$

4. On effectue une intégration par parties.

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\cos(t)dt = \left[\frac{(x-t)^2}{2}\sin(t)\right]_0^x + \int_0^x (x-t)\sin(t)dt = \int_0^x (x-t)\sin(t)dt.$$

On effectue ensuite une nouvelle IPP :

$$\int_0^x (x-t)\sin(t)dt = [-(x-t)\cos(t)]_0^x - \int_0^x \cos(t)dt = x - [\sin(t)]_0^x = x - \sin(x).$$

5. Si $0 < x < \pi/2$, on a pour tout $t \in [0, x]$:

$$0 \leq \frac{(x-t)^2}{2}\cos(t) \quad \text{donc} \quad 0 \leq \frac{\frac{(x-t)^2}{2}\cos(t)}{x^2} \leq \frac{1}{2}\cos(t).$$

On intègre entre 0 et x :

$$0 \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\cos(t)dt \leq \frac{1}{2}\int_0^x \cos(t)dt.$$

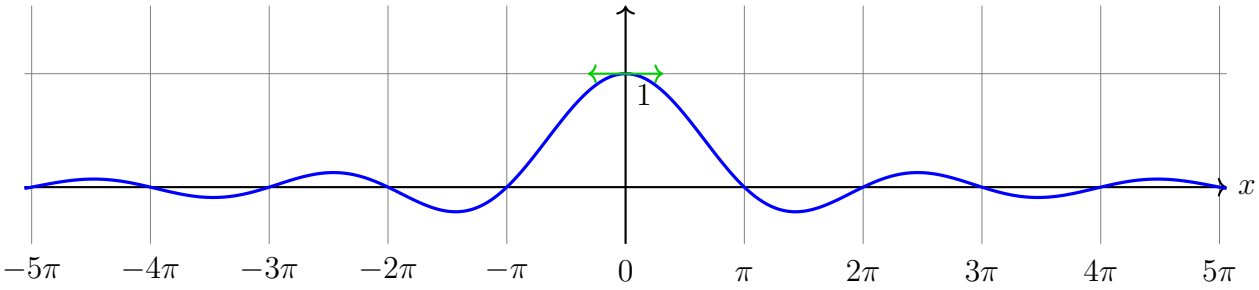
D'après la question précédente, on obtient :

$$0 \leq \frac{x-\sin(x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}\sin(x).$$

6. On fait $x \to 0$ dans l'encadrement précédent. Puisque $\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a alors que $\frac{x-\sin(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. La fonction $x \mapsto \frac{x-\sin(x)}{x^2}$ est impaire, donc $\frac{x-\sin(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$. Les limites à gauche et à droite en 0 existent et coïncident, donc $\frac{x-\sin(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
7. Finalement, d'après la question 2, on obtient que

$$\mathrm{sinc}'(x) = \underbrace{\frac{\cos(x)-1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{x-\sin(x)}{x^2}}_{\to 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Remarque : Le résultat se voyait graphiquement, en effet, la tangente en 0 *du graphe de la fonction* sinc *est horizontale.*



Solution 6 - Intégrales de Wallis (☞ exercice)

1. On a $W_0 = \pi/2$ et $W_1 = 1$ par un calcul immédiat d'intégrale.
2. On fait une IPP astucieuse en considérant que $\sin^n(t) = \sin(t)\sin^{n-1}(t)$.

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(t)\sin(t)dt \\ &= \left[-\sin^{n-1}(t)\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t)\cos^2(t)dt \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t)(1-\sin^2(t))dt \\ &= (n-1)(W_{n-2} - W_n). \end{aligned}$$

   Donc $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$
3. On démontre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'initialisation a été faite à la question 1, on fait maintenant l'étape d'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le résultat soit vrai au rang n. On a :

$$W_{2(n+1)} = W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \quad \text{et} \quad W_{2(n+1)+1} = W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1}.$$

   Par hypothèse de récurrence, on a alors

$$W_{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n\ (2n-2)\dots 2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)(2n-1)\dots 1}{2(n+1)\ 2n\dots 2} \frac{\pi}{2}$$

   et

$$W_{2(n+1)+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} \frac{2n\ (2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 1} = \frac{2(n+1)\ 2n\dots 2}{(2n+3)(2n+1)\dots 1}.$$

   D'où l'hérédité, et le résultat par récurrence.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a par la question précédente :

$$W_{2n}W_{2n+1} = \frac{(2n-1)\dots 1}{2n\dots 2} \frac{\pi}{2} \frac{2n\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

   Donc $(2n+1)W_{2n}W_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

Solution 7 - Intégrations itérées (☞ exercice)

1. On a $u_1(x) = \int_0^x 1dt = x$, puis $u_2(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$. On émet l'hypothèse que $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, et on le démontre par récurrence. L'initialisation a déjà été faite ($u_0(x) = 1 = \frac{x^0}{0!}$) et on fait l'étape d'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. On a alors $u_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!}dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. D'où le résultat.

En particulier, on a pour tout $x \in [0,1]$: $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. Puisque pour tout $x \in [0,1]$, on a $u_0(x) \leq M$, alors $\int_0^x u_0(t)dt \leq \int_0^x M dt$ donc $u_1(x) \leq xM$.

3. On démontre le résultat par récurrence sur $\mathbb{N}$. On a $u_0(x) \leq M \times 1 = Mv_0(x)$ d'où l'initialisation. Pour l'hérédité, on pose $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $u_n(x) \leq Mv_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. On a alors

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t)dt \leq \int_0^x Mv_n(t)dt = Mv_{n+1}(x).$$

4. Par encadrement, on a

$$0 \leq u_n(x) \leq Mv_n(x)$$

et $Mv_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

5. Avec $u_0(x) = e^x$, on a $u_1(x) = e^x - 1$ et $u_2(x) = e^x - 1 - x$. On émet l'hypothèse que $u_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$. On vient de faire l'initialisation, et on démontre l'hérédité. On suppose que le résultat est vrai à un rang n. On a alors par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x) &= \int_0^x u_n(t)dt \\
&= \int_0^x \left(e^t - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \right) dt \\
&= \int_0^x e^t dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x \frac{t^k}{k!} dt \\
&= e^x - 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. En particulier, puisque $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par la question précédente, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x.$$

Remarque : En fait, on peut se placer sur n'importe quel segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et le résultat reste inchangé. Ceci montre que la limite précédente est en fait valable pour tout $x \in \mathbb{R}$!