Histoires de la fonction zêta de Riemann

Giovanni Lebaron
25 septembre 2024

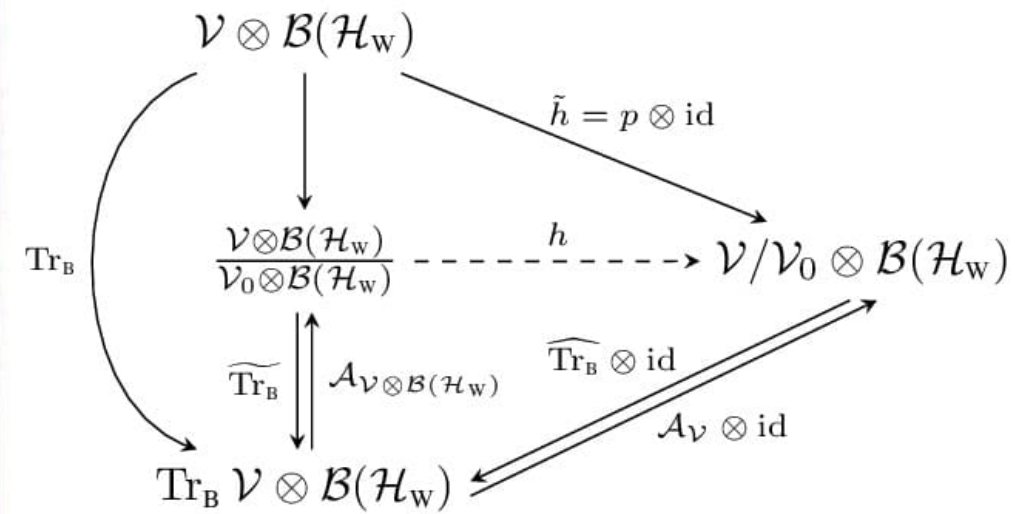
L'analyse complexe... à quoi ça sert ?

L'analyse complexe... à quoi ça sert ?









Introduction

Un *nombre premier* est un entier qui admet exactement deux diviseurs.

Introduction

Un *nombre premier* est un entier qui admet exactement deux diviseurs.

–300. Euclide : il en existe une infinité.

Introduction

Un *nombre premier* est un entier qui admet exactement deux diviseurs.

–300. Euclide : il en existe une infinité.

–200. Crible d'Ératosthène.

Introduction

Un *nombre premier* est un entier qui admet exactement deux diviseurs.

–300. Euclide : il en existe une infinité.

–200. Crible d'Ératosthène.

. . . et c'est à peu près tout pour l'instant.

Introduction

1644. Problème de Bâle : que vaut la somme des inverses des carrés ?

Introduction

1644. Problème de Bâle : que vaut la somme des inverses des carrés ?

1735. Euler répond à cette question :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Introduction

1644. Problème de Bâle : que vaut la somme des inverses des carrés ?

1735. Euler répond à cette question :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Il découvre un lien entre ce type de séries et les nombres premiers :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Introduction

1785. Legendre étudie la fonction de compte :

$$\pi(x) = \text{card}\,\{p \text{ premier} \mid p \leq x\}.$$

Introduction

1785. Legendre étudie la fonction de compte :

$$\pi(x) = \text{card}\,\{p \text{ premier} \mid p \leq x\}.$$

1808. Il propose l'approximation :

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x - 1.08366}.$$

Introduction

1785. Legendre étudie la fonction de compte :

$$\pi(x) = \text{card}\,\{p \text{ premier} \mid p \leq x\}.$$

1808. Il propose l'approximation :

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x - 1.08366}.$$

1838. Dirichlet précise celle-ci :

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t.$$

Introduction

1859. Riemann reprend les travaux d'Euler et définit la célèbre fonction zêta qui portera son nom.

Introduction

1859. Riemann reprend les travaux d'Euler et définit la célèbre fonction zêta qui portera son nom.

- $\rightarrow$ prolongement au plan complexe
- $\rightarrow$ conjecture sur ses zéros
- $\rightarrow$ découverte de liens profonds avec les nombres premiers

Introduction

1859. Riemann reprend les travaux d'Euler et définit la célèbre fonction zêta qui portera son nom.

- $\rightarrow$ prolongement au plan complexe
- $\rightarrow$ conjecture sur ses zéros
- $\rightarrow$ découverte de liens profonds avec les nombres premiers

1896. Hadamard et De La Vallée Poussin démontrent le théorème des nombres premiers, entre autres à l'aide des travaux de Riemann.

Introduction

1859. Riemann reprend les travaux d'Euler et définit la célèbre fonction zêta qui portera son nom.

- $\rightarrow$ prolongement au plan complexe
- $\rightarrow$ conjecture sur ses zéros
- $\rightarrow$ découverte de liens profonds avec les nombres premiers

1896. Hadamard et De La Vallée Poussin démontrent le théorème des nombres premiers, entre autres à l'aide des travaux de Riemann.

. . . et l'histoire continue !

Sommaire

1. Fonction zêta de Riemann
   - Définitions et premières propriétés
   - L'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$
   - Les zéros et l'hypothèse de Riemann

2. Liens avec les nombres premiers
   - Fonction de compte
   - Théorème des nombres premiers
   - Vers la formule explicite

Définition

La *fonction zêta de Riemann* est définie, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Définition

La *fonction zêta de Riemann* est définie, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

C'est une fonction analytique sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$, et elle possède un pôle simple en $s = 1$.

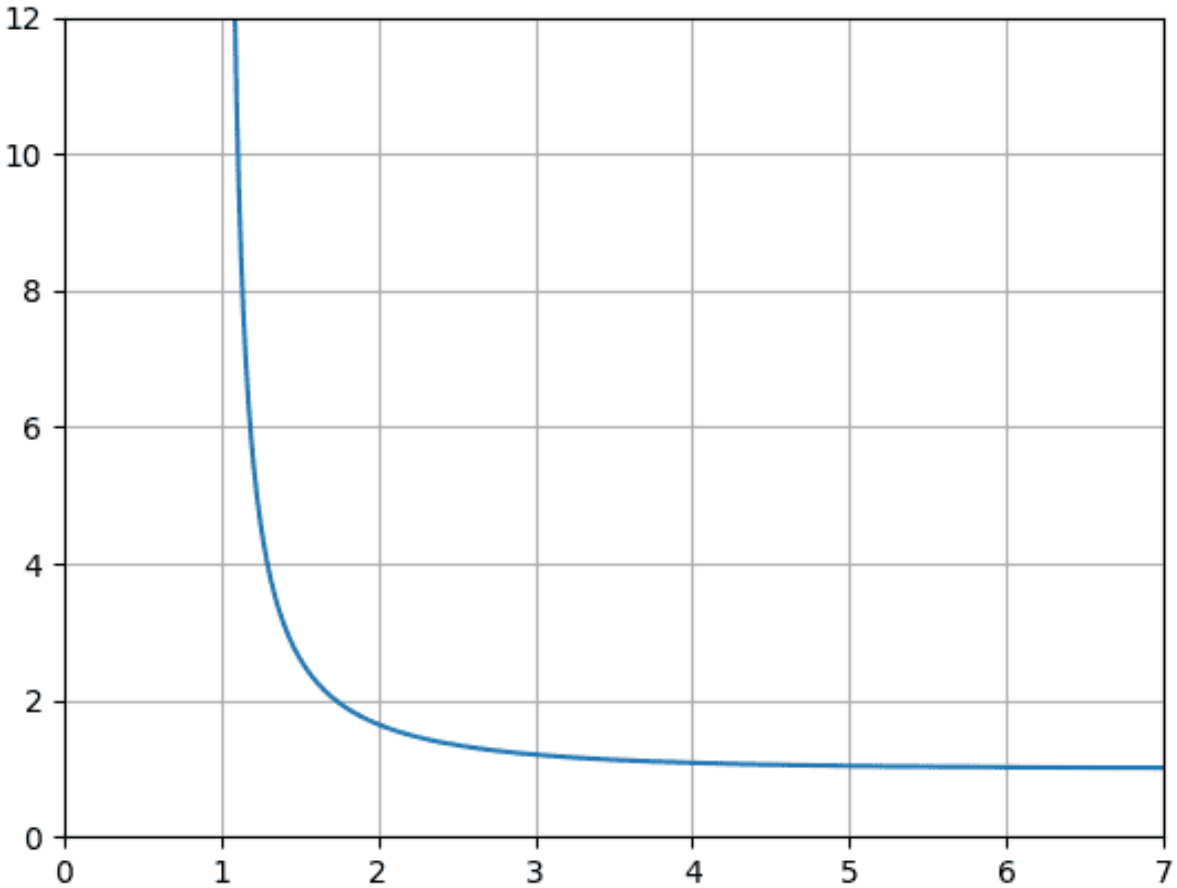


FIGURE 1 – Graphe de $\zeta(s)$ pour $s \in (1, 7)$.

Euler a démontré que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}$$

Euler a démontré que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}$$

. . . mais on ne sait pas grand chose sur les $\zeta(2n+1)$.

Euler a démontré que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}$$

. . . mais on ne sait pas grand chose sur les $\zeta(2n+1)$.

1978. $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ (Apéry).

Euler a démontré que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}$$

. . . mais on ne sait pas grand chose sur les $\zeta(2n+1)$.

1978. $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ (Apéry).

2000. Il existe une infinité d'irrationnels parmi les $\zeta(2n+1)$ (Rivoal).

Euler a démontré que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}$$

. . . mais on ne sait pas grand chose sur les $\zeta(2n+1)$.

1978. $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ (Apéry).

2000. Il existe une infinité d'irrationnels parmi les $\zeta(2n+1)$ (Rivoal).

2001. L'un des nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ est irrationnel (Zudilin).

Théorème (Euler, 1743)

Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Théorème (Euler, 1743)

Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

On peut en déduire que la probabilité de « tirer au sort » k entiers premiers entre eux vaut $1/\zeta(k)$.

Fonction zêta de Riemann

L'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$

Théorème

La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe, vérifiant, pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Théorème

La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe, vérifiant, pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

En prenant $s = -2n$ avec $n \geq 1$ entier, on obtient :

$$\boxed{\zeta(-2n) = 0.}$$

Théorème

La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe, vérifiant, pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

En prenant $s = -2n$ avec $n \geq 1$ entier, on obtient :

$$\boxed{\zeta(-2n) = 0.}$$

Ce sont les *zéros triviaux* de ζ. Où se situent les autres ?

Théorème

L'équation fonctionnelle de ζ est équivalente à :

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

pour une certaine fonction méromorphe ξ. De plus, les zéros de ξ sont exactement les zéros non triviaux de ζ.

Théorème

L'équation fonctionnelle de ζ est équivalente à :

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

pour une certaine fonction méromorphe ξ. De plus, les zéros de ξ sont exactement les zéros non triviaux de ζ.

Les zéros de ξ se situent dans la *bande critique* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$.

Théorème

L'équation fonctionnelle de ζ est équivalente à :

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

pour une certaine fonction méromorphe ξ. De plus, les zéros de ξ sont exactement les zéros non triviaux de ζ.

Les zéros de ξ se situent dans la *bande critique* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$.

Hypothèse de Riemann. Les zéros de ξ se situent tous sur la *droite critique* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

Quand ?	Qui ?	Résultat

$N_0(T)$: nombre de zéros $\rho = \sigma + it$ sur la droite critique, avec $|t| \leq T$

N_A : proportion asymptotique de zéros sur la droite critique

Quand ?	**Qui ?**	**Résultat**
1914	Hardy	$N_0(T) \to \infty$

$N_0(T)$: nombre de zéros $\rho = \sigma + it$ sur la droite critique, avec $|t| \leq T$

N_A : proportion asymptotique de zéros sur la droite critique

Quand ?	**Qui ?**	**Résultat**
1914	Hardy	$N_0(T) \to \infty$
1921	Hardy, Littlewood	$N_0(T) \gg T$

$N_0(T)$: nombre de zéros $\rho = \sigma + it$ sur la droite critique, avec $|t| \leq T$

N_A : proportion asymptotique de zéros sur la droite critique

Quand ?	**Qui ?**	**Résultat**
1914	Hardy	$N_0(T) \to \infty$
1921	Hardy, Littlewood	$N_0(T) \gg T$
1942	Selberg	$N_0(T) \gg T \log T$

$N_0(T)$: nombre de zéros $\rho = \sigma + it$ sur la droite critique, avec $|t| \leq T$

N_A : proportion asymptotique de zéros sur la droite critique

Quand ?	**Qui ?**	**Résultat**
1914	Hardy	$N_0(T) \to \infty$
1921	Hardy, Littlewood	$N_0(T) \gg T$
1942	Selberg	$N_0(T) \gg T \log T$
1974	Levinson	$N_A \geq 1/3$

$N_0(T)$: nombre de zéros $\rho = \sigma + it$ sur la droite critique, avec $|t| \leq T$

N_A : proportion asymptotique de zéros sur la droite critique

Quand ?	**Qui ?**	**Résultat**
1914	Hardy	$N_0(T) \to \infty$
1921	Hardy, Littlewood	$N_0(T) \gg T$
1942	Selberg	$N_0(T) \gg T \log T$
1974	Levinson	$N_A \geq 1/3$
1989	Conrey	$N_A \geq 0.4088$

$N_0(T)$: nombre de zéros $\rho = \sigma + it$ sur la droite critique, avec $|t| \leq T$

N_A : proportion asymptotique de zéros sur la droite critique

Quand ?	**Qui ?**	**Résultat**
1914	Hardy	$N_0(T) \to \infty$
1921	Hardy, Littlewood	$N_0(T) \gg T$
1942	Selberg	$N_0(T) \gg T \log T$
1974	Levinson	$N_A \geq 1/3$
1989	Conrey	$N_A \geq 0.4088$
2011	Bui, Young	$N_A \geq 0.4105$

$N_0(T)$: nombre de zéros $\rho = \sigma + it$ sur la droite critique, avec $|t| \leq T$

N_A : proportion asymptotique de zéros sur la droite critique

Liens avec les nombres premiers

Fonction de compte

Définition

La *fonction de compte des nombres premiers* est définie par :

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \text{card}\,\{p \text{ premier} \mid p \leq x\}.$$

Liens avec les nombres premiers

Fonction de compte

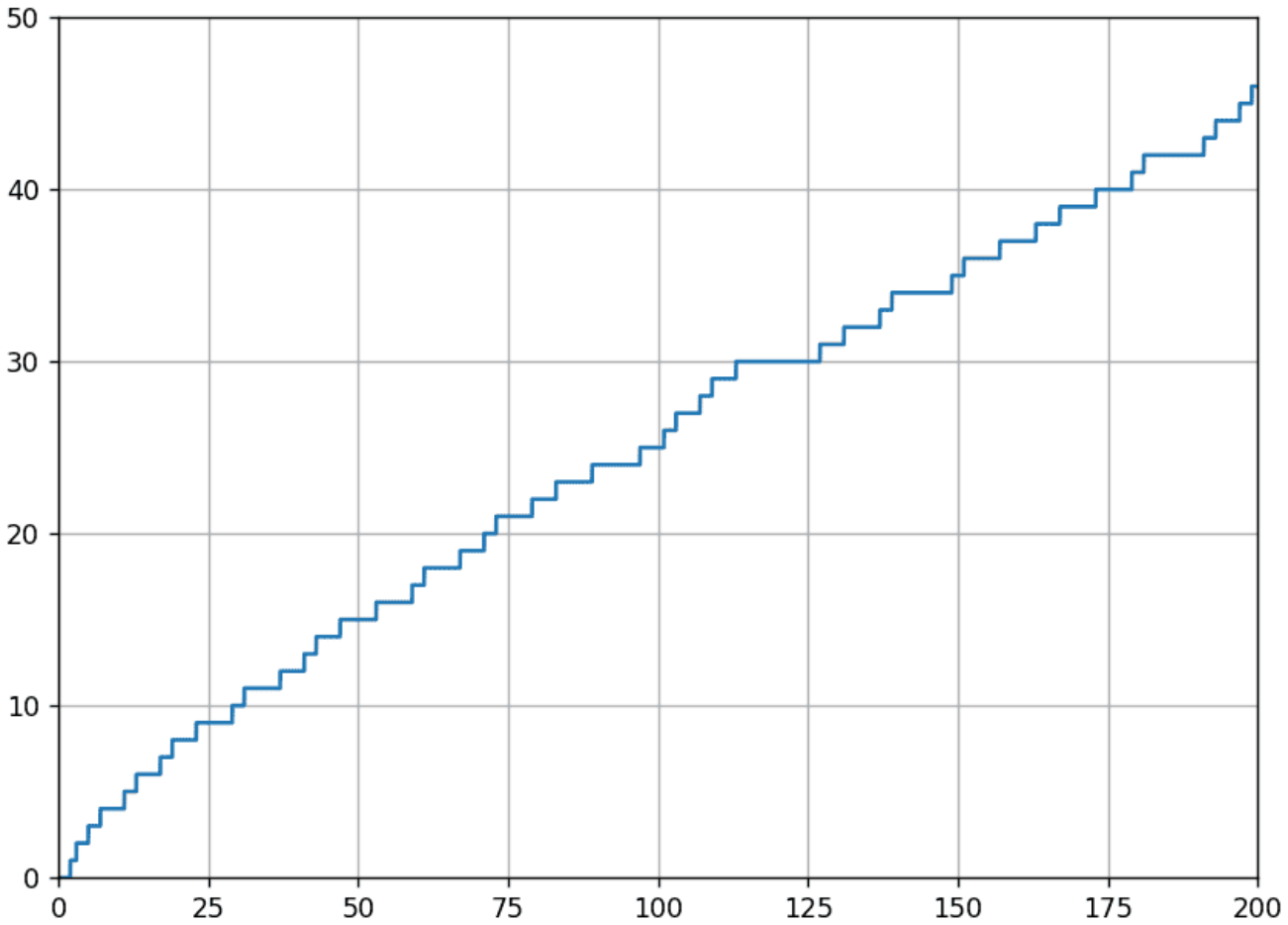


FIGURE 2 – Graphe de $\pi(x)$ pour $x \in [0, 200]$.

Liens avec les nombres premiers

Théorème des nombres premiers

Théorème (Hadamard, De La Vallée Poussin, 1896)

Lorsque $x \to \infty$:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Théorème (Hadamard, De La Vallée Poussin, 1896)

Lorsque $x \to \infty$:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Dans la plupart des démonstrations faisant appel à l'analyse complexe, une étape cruciale consiste à montrer :

$$\mathrm{Re}(s) = 1 \implies \zeta(s) \neq 0.$$

Liens avec les nombres premiers

Vers la formule explicite

Une meilleure approximation de $\pi(x)$ est donnée par la fonction :

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\log t}\, \mathrm{d}t.$$

Une meilleure approximation de $\pi(x)$ est donnée par la fonction :

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\log t}\, \mathrm{d}t.$$

Les zéros non triviaux de ζ sont fortement liés à la répartition des nombres premiers, et à l'estimation de l'écart $|\pi(x) - \mathrm{li}(x)|$.

Théorème

(i) L'hypothèse de Riemann est vraie si, et seulement si, lorsque $x \to \infty$:

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \ll \sqrt{x} \log x.$$

Théorème

(i) L'hypothèse de Riemann est vraie si, et seulement si, lorsque $x \to \infty$:

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \ll \sqrt{x} \log x.$$

(ii) Si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors pour tout $x \geq 2657$:

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leq \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \log x.$$

Théorème

(i) L'hypothèse de Riemann est vraie si, et seulement si, lorsque $x \to \infty$:

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \ll \sqrt{x} \log x.$$

(ii) Si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors pour tout $x \geq 2657$:

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leq \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \log x.$$

D'où est-ce que tout cela provient ?

Liens avec les nombres premiers

Vers la formule explicite

Riemann définit, pour $x > 1$, la quantité :

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi(x^{1/n}).$$

Liens avec les nombres premiers

Vers la formule explicite

Riemann définit, pour $x > 1$, la quantité :

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi(x^{1/n}).$$

Lorsque $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a l'égalité :

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^{\infty} J(x) x^{-s-1} \, \mathrm{d}x.$$

Liens avec les nombres premiers

Vers la formule explicite

Riemann définit, pour $x > 1$, la quantité :

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi(x^{1/n}).$$

Lorsque $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a l'égalité :

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^{\infty} J(x) x^{-s-1} \, \mathrm{d}x.$$

Par inversion de Mellin, on en déduit :

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \zeta(a+it)}{a+it} x^{a+it} \, \mathrm{d}t.$$

Proposition

Pour tout $x \in (1, \infty)$:

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{1/n})$$

où μ désigne la fonction de Möbius :

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré parfait} > 1, \\ 1 & \text{si } n = p_1 \cdots p_{2r} \text{ avec } r \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{si } n = p_1 \cdots p_{2r+1} \text{ avec } r \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Théorème (Riemann, 1859 / Von Mangoldt, 1895 / Landau, 1908)

Pour tout $x \in (1, \infty)$:

$$J(x) = \mathrm{li}(x) - \log 2 - \sum_{\rho} \mathrm{li}(x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{1}{t(t^2-1)\log t}\, \mathrm{d}t$$

où la somme porte sur les zéros non triviaux ρ de la fonction ζ.

Théorème (Riemann, 1859 / Von Mangoldt, 1895 / Landau, 1908)

Pour tout $x \in (1, \infty)$:

$$J(x) = \mathrm{li}(x) - \log 2 - \sum_{\rho} \mathrm{li}(x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{1}{t(t^2-1)\log t}\, \mathrm{d}t$$

où la somme porte sur les zéros non triviaux ρ de la fonction ζ.

Chaque zéro non trivial de ζ agit comme une correction sur le terme principal de $J(x)$, et donc sur l'approximation de $\pi(x)$.

Merci !

Merci pour votre attention !