Histoires de la fonction zêta de Riemann
Stage de fin de licence 3

Giovanni Lebaron, encadré par Erwan Hillion



Introduction

Un *nombre premier* est un entier qui admet exactement deux diviseurs.

Introduction

Un *nombre premier* est un entier qui admet exactement deux diviseurs.

–300. Euclide : il en existe une infinité.

Introduction

Un *nombre premier* est un entier qui admet exactement deux diviseurs.

–300. Euclide : il en existe une infinité.

–200. Crible d'Ératosthène.

Introduction

1644. Problème de Bâle : que vaut la somme des inverses des carrés ?

Introduction

1644. Problème de Bâle : que vaut la somme des inverses des carrés ?

1735. Euler répond à cette question :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Introduction

1644. Problème de Bâle : que vaut la somme des inverses des carrés ?

1735. Euler répond à cette question :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Il découvre un lien entre ce type de séries et les nombres premiers :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Introduction

1644. Problème de Bâle : que vaut la somme des inverses des carrés ?

1735. Euler répond à cette question :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Il découvre un lien entre ce type de séries et les nombres premiers :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

1859. Riemann reprend les travaux d'Euler.

- $\rightarrow$ définition et prolongement de la fonction zêta
- $\rightarrow$ conjecture sur ses zéros
- $\rightarrow$ liens avec les nombres premiers

Sommaire

1. Fonction zêta de Riemann
   - → Définition et propriétés usuelles
   - → Équation fonctionnelle de $\zeta(s)$
   - → Infinité des zéros sur la droite critique
2. Séries de Dirichlet et convolution
3. Liens avec les nombres premiers
   - → Le théorème de Wiener-Ikehara
   - → Théorème des nombres premiers
   - → La formule explicite
4. Caractères et fonctions L de Dirichlet
   - → Propriétés des séries L de Dirichlet
   - → Théorème de la progression arithmétique
   - → L'équation fonctionnelle des $L(s, \chi)$
5. La quête des exposants
   - → Formule sommatoire de Voronoï
   - → Le problème des diviseurs de Dirichlet
   - → Le problème du cercle de Gauss

Fonction zêta de Riemann

Définition, équation fonctionnelle, zéros

Définition

La *fonction zêta de Riemann* est définie, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Définition

La *fonction zêta de Riemann* est définie, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

C'est une fonction analytique sur $\mathrm{Re}(s) > 1$, avec un pôle simple en $s = 1$.

Théorème

La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe, vérifiant, pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Cette équation fonctionnelle peut s'écrire $h(s)\zeta(s) = h(1-s)\zeta(1-s)$.

Théorème

La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe, vérifiant, pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Cette équation fonctionnelle peut s'écrire $h(s)\zeta(s) = h(1-s)\zeta(1-s)$.

$\rightarrow \zeta(-2n) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$ (zéros *triviaux*)

Théorème

La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe, vérifiant, pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Cette équation fonctionnelle peut s'écrire $h(s)\zeta(s) = h(1-s)\zeta(1-s)$.

$\rightarrow \zeta(-2n) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$ (zéros *triviaux*)

Hypothèse de Riemann. Les zéros non triviaux se situent tous sur la *droite critique* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

Liens avec les nombres premiers

Théorème des nombres premiers

Théorème (Hadamard, De La Vallée Poussin, 1896)

Lorsque $x \to \infty$:

$$\pi(x) = \text{card}\,\{p \text{ premier} \mid p \leq x\} \sim \frac{x}{\log x}.$$

Théorème (Hadamard, De La Vallée Poussin, 1896)

Lorsque $x \to \infty$:

$$\pi(x) = \text{card}\,\{p \text{ premier} \mid p \leq x\} \sim \frac{x}{\log x}.$$

Une étape cruciale de beaucoup de démonstrations consiste à montrer que $\zeta(s) \neq 0$ lorsque $\text{Re}(s) = 1$.

Liens avec les nombres premiers

La formule explicite

Une meilleure approximation de $\pi(x)$ est donnée par la fonction :

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t.$$

Une meilleure approximation de $\pi(x)$ est donnée par la fonction :

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t.$$

Les zéros non triviaux de ζ sont fortement liés à la répartition des nombres premiers, et à l'estimation de l'écart $|\pi(x) - \mathrm{li}(x)|$.

Théorème (Riemann, 1859 / Von Mangoldt, 1895 / Landau, 1908)

Pour tout $x \in (1, \infty)$:

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{1/n})$$

avec :

$$J(x) = \mathrm{li}(x) - \log 2 - \sum_{\rho} \mathrm{li}(x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{1}{t(t^2-1)\log t}\, \mathrm{d}t$$

où la somme porte sur les zéros non triviaux ρ de la fonction ζ.

La quête des exposants

Formule sommatoire de Voronoï

On se donne une fonction $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, dont on cherche à étudier la *fonction sommatoire* :

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n).$$

On se donne une fonction $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, dont on cherche à étudier la *fonction sommatoire* :

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n).$$

Son développement asymptotique prend souvent la forme :

$$A(x) = \text{partie principale} + O(x^{\beta}).$$

On se donne une fonction $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, dont on cherche à étudier la *fonction sommatoire* :

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n).$$

Son développement asymptotique prend souvent la forme :

$$A(x) = \text{partie principale} + O(x^{\beta}).$$

Objectif. Optimiser l'exposant β.

Théorème

Soit $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. On suppose que :

$$L(s,a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

se prolonge en une fonction méromorphe, vérifiant une équation fonctionnelle de la forme :

$$h(s)L(s,a) = h(1-s)L(1-s,a).$$

Alors, sous des hypothèses convenables, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

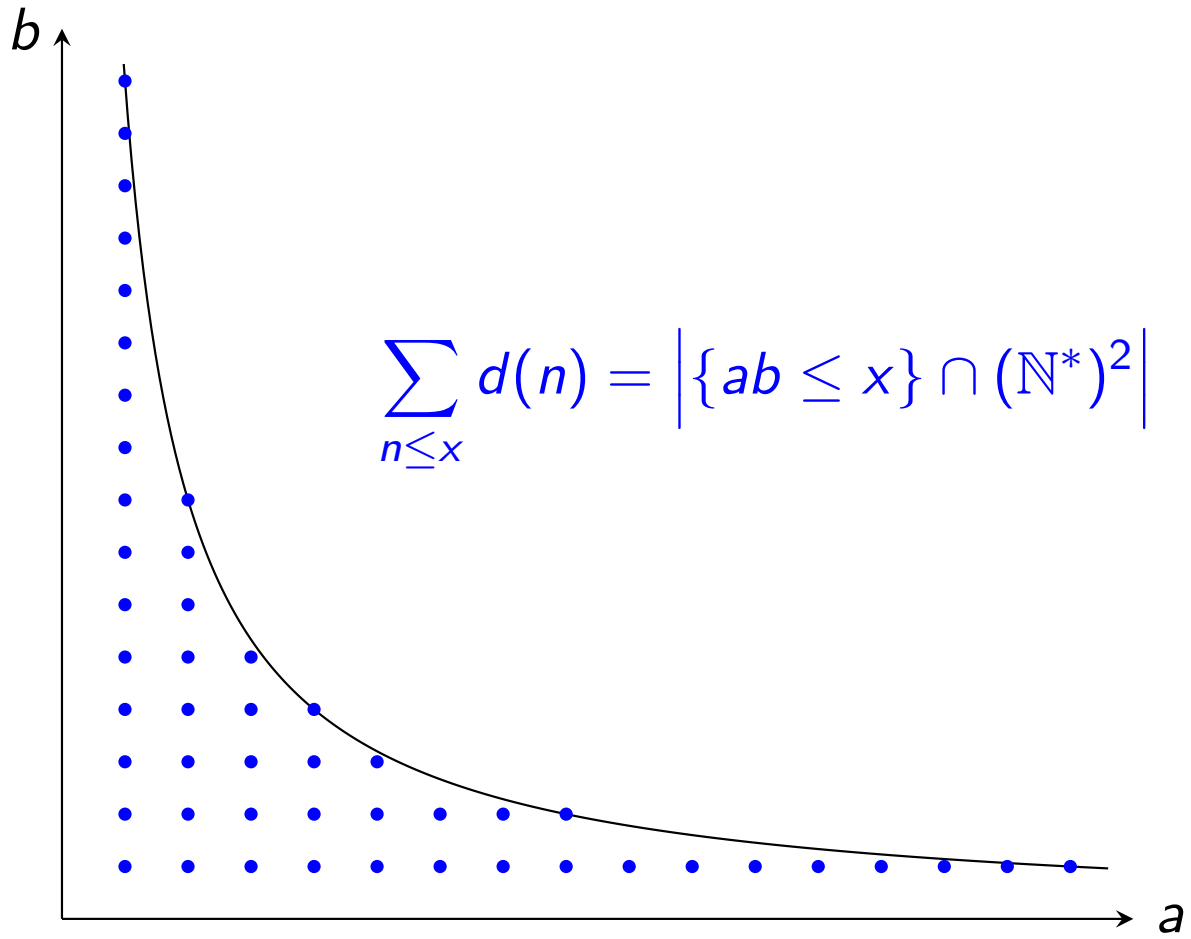
$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)f(n) = f(0)L(0,a) + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \int_0^{\infty} f(t)H(nt)\, \mathrm{d}t.$$

La quête des exposants

Le problème des diviseurs de Dirichlet

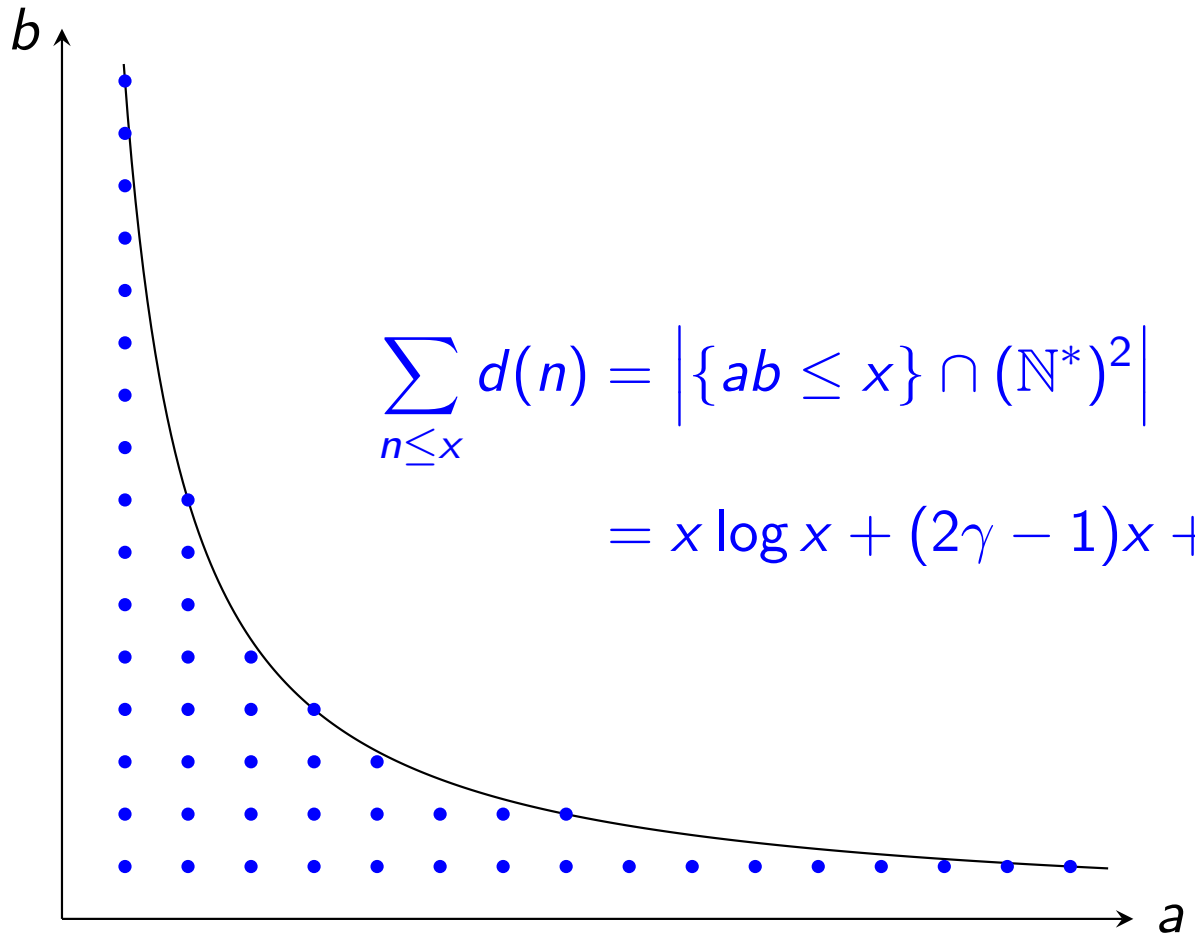
On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n.

On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n.



$$\sum_{n \leq x} d(n) = \left| \{ ab \leq x \} \cap (\mathbb{N}^*)^2 \right|$$

On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n.



$$\sum_{n\leq x} d(n) = \left|\{ab \leq x\} \cap (\mathbb{N}^*)^2\right|$$

$$= x\log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{1/2}).$$

La fonction L associée à $d(n)$ est :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta^2(s).$$

La fonction L associée à $d(n)$ est :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta^2(s).$$

Théorème (Voronoï, 1904)

Lorsque $x \to \infty$:

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{1/3} \log x).$$

La fonction L associée à $d(n)$ est :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta^2(s).$$

Théorème (Voronoï, 1904)

Lorsque $x \to \infty$:

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{1/3} \log x).$$

On sait que l'exposant optimal se trouve entre $1/4$ et $131/416 \approx 0.3149$.

La quête des exposants

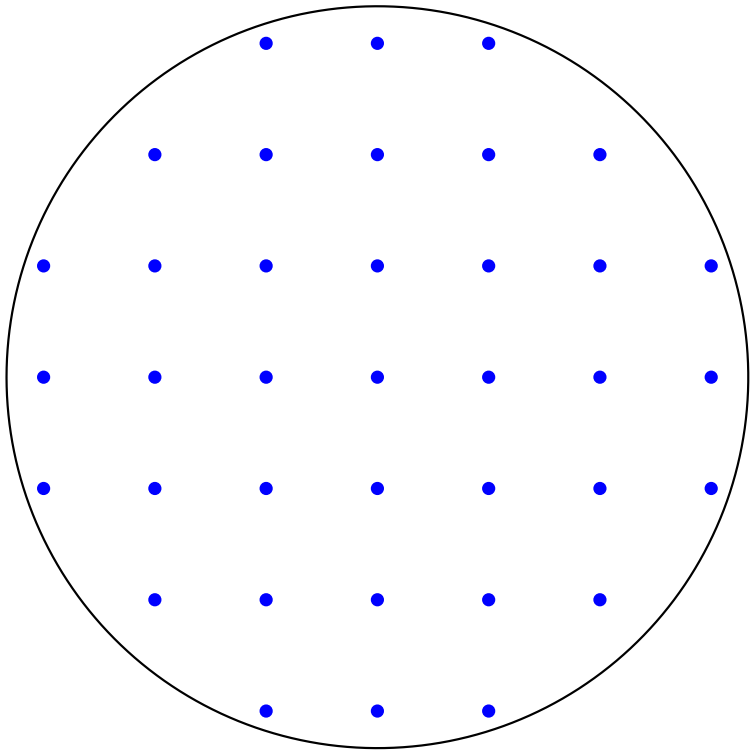
Le problème du cercle de Gauss

On note $r_2(n) = \text{card}\left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 = n\right\}$.

La quête des exposants

Le problème du cercle de Gauss

On note $r_2(n) = \text{card}\left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 = n\right\}$.

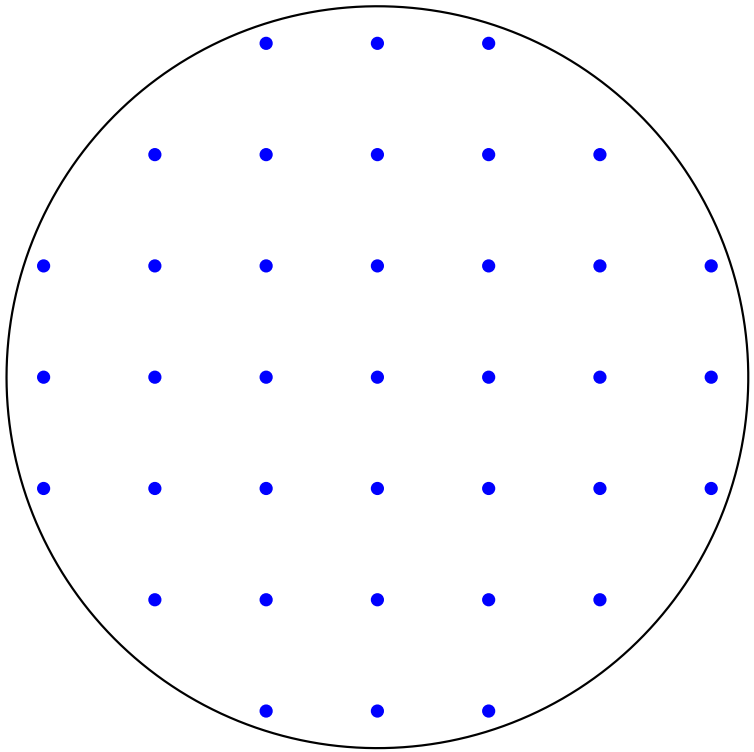


$$\sum_{n \leq x} r_2(n) = \left|\mathbb{D}\left(0, \sqrt{x}\right) \cap \mathbb{Z}^2\right|$$

La quête des exposants

Le problème du cercle de Gauss

On note $r_2(n) = \text{card}\left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 = n\right\}$.



$$\sum_{n \leq x} r_2(n) = \left|\mathbb{D}\left(0, \sqrt{x}\right) \cap \mathbb{Z}^2\right|$$

$$= \pi x + O(x^{1/2}).$$

La fonction L associée à $r_2(n)$ est :

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_2(n)}{n^s} = \zeta(s)L(s,\chi_4) \quad \text{avec} \quad L(s,\chi_4) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

La fonction L associée à $r_2(n)$ est :

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_2(n)}{n^s} = \zeta(s)L(s,\chi_4) \quad \text{avec} \quad L(s,\chi_4) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

Théorème (Voronoï, 1904)

Lorsque $x \to \infty$:

$$\sum_{n\leq x} r_2(n) = \pi x + O(x^{1/3}).$$

La fonction L associée à $r_2(n)$ est :

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_2(n)}{n^s} = \zeta(s)L(s,\chi_4) \quad \text{avec} \quad L(s,\chi_4) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

Théorème (Voronoï, 1904)

Lorsque $x \to \infty$:

$$\sum_{n\leq x} r_2(n) = \pi x + O(x^{1/3}).$$

On sait que l'exposant optimal se trouve entre $1/4$ et $131/416 \approx 0.3149$.

Merci !

Merci pour votre attention !