Histoires de la fonction zêta de Riemann
Stage de fin de licence 3

Giovanni Lebaron, encadré par Erwan Hillion

Année universitaire 2023–2024

Sommaire

0 Préliminaires **6**

1 Fonction zêta de Riemann **11**

2 Séries de Dirichlet **20**

3 Liens avec les nombres premiers **22**

4 Caractères et fonctions L de Dirichlet **34**

5 La quête des exposants **43**





Table des matières

0 Préliminaires **6**
0.1 Deux fonctions d'Euler . . . 6
0.2 Formule sommatoire de Poisson . . . 6
0.3 Transformée de Mellin . . . 7
0.4 Un résultat d'intégration . . . 9

1 Fonction zêta de Riemann **11**
1.1 Définition et premières propriétés . . . 11
1.2 L'équation fonctionnelle . . . 13
1.2.1 Par une intégrale de contour . . . 13
1.2.2 Par la fonction thêta de Jacobi . . . 14
1.3 Les zéros et l'hypothèse de Riemann . . . 16
1.4 Infinité des zéros sur la droite critique . . . 17

2 Séries de Dirichlet **20**
2.1 Fonctions multiplicatives et convolution . . . 20
2.2 Convolution et produit de séries . . . 20

3 Liens avec les nombres premiers **22**
3.1 Le théorème de Wiener-Ikehara . . . 22
3.2 Application : Théorème des nombres premiers . . . 25
3.3 Application : Moyenne de $\varphi^{-1}(n)$ . . . 26
3.4 La formule explicite . . . 27

4 Caractères et fonctions L de Dirichlet **34**
4.1 Caractères sur un groupe fini . . . 34
4.2 Séries L de Dirichlet . . . 36
4.3 Non-annulation de $L(1,\chi)$ . . . 37
4.4 Théorème de la progression arithmétique . . . 38
4.5 L'équation fonctionnelle des fonctions L . . . 39

5 La quête des exposants **43**
5.1 Le problème des diviseurs de Dirichlet . . . 44
5.2 Le problème du cercle de Gauss . . . 48
5.3 Annexe : Fonctions de Bessel . . . 49

Introduction

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs (positifs). Découverts dans l'Antiquité, les nombres premiers jouent un rôle crucial en arithmétique, notamment par l'intermédiaire du théorème de décomposition en facteurs premiers. Dans ses *Éléments*, Euclide (vers -300) démontre que :

« Les nombres premiers sont plus nombreux que n'importe quelle multitude de nombres premiers proposée ».

La méthode du crible d'Érathosthène (vers -200), philosophe et mathématicien grec, permet de déterminer simplement la liste des nombres premiers inférieurs à une certaine limite « pas trop élevée ». On ne dispose cependant d'aucune formule qui pourrait générer « facilement » tous les nombres premiers. L'étude de leur répartition, *a priori* aléatoire et chaotique, est restée en suspens pendant plus d'un millénaire.

C'est de l'analyse que va surgir un lien inattendu avec les nombres premiers. En 1644, le mathématicien Pietro Mengoli (1626–1686) formule la question suivante : que vaut la somme des inverses des carrés ? Des valeurs approchées sont calculées, mais la série converge trop lentement. Pour obtenir 4 décimales exactes, il faut en effet additionner plus de 15 000 termes ! Nombreux sont les mathématiciens qui tentent de déterminer sa valeur exacte, en vain. C'est alors qu'en 1735, le mathématicien Leonhard Euler (1707–1783) annonce la découverte de cette valeur [Eul40], pour le moins surprenante :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

puis en publie une seconde démonstration en 1743, jugée plus rigoureuse que la première [Eul43]. Il généralise alors sa découverte à tous les entiers pairs et découvre un lien entre cette série et les nombres premiers :

$$\sum_n \frac{1}{n^s}=\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

La recherche sur ces derniers peine toutefois à progresser, et Euler écrit lui-même en 1751 que la répartition des nombres premiers reste un « mystère que l'esprit humain ne saurait jamais pénétrer », sans savoir qu'il sera rapidement démenti. Face à une suite dont les variations semblent chaotiques, l'idée de s'intéresser à sa moyenne peut s'avérer fructueuse. Il s'agit du raisonnement suivi par Adrien-Marie Legendre (1752–1833) qui propose dès 1797 une approximation pour la fonction de compte des nombres premiers :

$$\pi(x)=\operatorname{card}\{p \text{ premier} \mid p\leq x\}\approx\frac{x}{a\log x+b}$$

où a et b sont des réels [Leg97]. Il affine ce résultat en 1808, en proposant les valeurs $a=1$ et $b=-1.08366$. Cette approximation se voit précisée en 1838 par Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) :

$$\pi(x)\approx\int_2^x\frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t.$$

Pafnouti Tchebychev (1821–1894) parvient à démontrer que $\pi(x)$ est de l'ordre de $x\,/\log(x)$, et que ces deux quantités sont équivalentes, si la limite du quotient existe [Tch52]. Cette conjecture avait déjà été formulée par Carl Friedrich Gauss (1777–1855). L'une de ses tables de logarithmes comportait en effet la note manuscrite :

$$\text{« Primzahlen unter } a\,(=\infty)\ \frac{a}{la}\ \text{ ».}$$

Dans un article publié en 1859, Bernhard Riemann (1826–1866) reprend les travaux d'Euler, en définissant la célèbre fonction zêta qui portera son nom [Rie59]. Il la prolonge au plan complexe et conjecture que ses zéros ont tous pour partie réelle $1/2$, outre les entiers pairs strictement négatifs. Ses démonstrations restent assez lacunaires, mais les méthodes employées sont l'œuvre d'un véritable virtuose de l'analyse complexe et de l'analyse de Fourier, et constituent une véritable révolution pour l'époque. Riemann suggère également une formule exacte pour $\pi(x)$, faisant intervenir les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ et une certaine fonction $\mathrm{R}(x)$:

$$\pi(x)=\mathrm{R}(x)-\sum_\rho \mathrm{R}(x^\rho)+\text{termes négligeables.}$$

En 1896, Jacques Hadamard (1865–1963) et Charles-Jean de La Vallée Poussin (1866–1962) parviennent à résoudre la question de l'existence de la limite évoquée par Tchebychev, et démontrent indépendamment le théorème des nombres premiers en étudiant le comportement de $\zeta(s)$ sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$ [Had96; La 96]. Mais à ce jour, l'hypothèse de Riemann résiste encore. Elle est inscrite depuis l'an 2000 dans la liste des sept problèmes du millénaire : l'institut de mathématiques Clay offrira un million de dollars à qui saura la prouver ou l'infirmer.

Résumé

L'objectif de ce stage était de mener une étude assez générale de plusieurs cas particuliers de séries de Dirichlet, notamment la fonction zêta de Riemann, afin de démontrer le théorème des nombres premiers et celui de la progression arithmétique à travers l'étude des fonctions $L(s, \chi)$. Dans un second temps, l'idée était d'étudier le problème des diviseurs de Dirichlet et celui du cercle de Gauss. Comme souvent en théorie des nombres, les énoncés des problèmes sont simples à comprendre, mais les méthodes analytiques requises pour améliorer certaines estimations asymptotiques sont tout sauf triviales. En l'occurrence, les problèmes évoqués nécessitaient une étude approfondie des fonctions de Bessel, sur lesquelles nous avons pu observer que les preuves des résultats considérés comme classiques sont assez peu documentées dans la littérature. L'aboutissement de cette aventure fait l'objet de la section annexe 5.3, dédiée à quelques-unes de ces démonstrations.

Remerciements

Je tiens à remercier très chaleureusement Erwan Hillion, mon maître de stage, pour son accueil, sa disponibilité, ses conseils, ses retours, et son soutien tout au long du stage, ainsi que Sébastien Darses pour ses précieux conseils lors des passionnants échanges que nous avons pu avoir. Ce stage fut une merveilleuse expérience. Je remercie également l'ensemble de l'équipe *Probabilités* du groupe *Mathématiques de l'aléatoire* de l'Institut de Mathématiques de Marseille, où s'est déroulé le stage, qui m'a permis d'assister aux séminaires de Probabilités.

Notations et définitions

Dans tout le document, nous noterons implicitement :

$$\sigma = \mathrm{Re}(s) \quad \text{et} \quad t = \mathrm{Im}(s)$$

dès que la variable $s \in \mathbb{C}$ est introduite. Nous noterons $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré :

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

et désignerons par $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz, constitué des fonctions lisses à décroissance rapide :

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \;\middle|\; x \longmapsto x^m f^{(n)}(x) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \text{ pour tout } (m,n) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $|E|$ ou $\mathrm{card}\, E$, et l'ensemble des nombres premiers sera noté $\mathbb{P}$. Lorsque l'indice d'une somme ou d'un produit porte la lettre p, cela signifiera toujours ici qu'il parcourt $\mathbb{P}$:

$$\sum_{p \leq x} a(p) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} a(p).$$

Certaines intégrales que nous serons amenés à manipuler ne seront pas absolument convergentes. Dans le cas d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on voudrait intégrer sur $\mathbb{R}$, il se peut que l'intégrale impropre de f ne soit même pas définie au sens de Riemann. Il nous arrivera donc d'utiliser la *valeur principale* de l'intégrale :

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

et cela vaudra également pour les intégrales complexes sur des droites verticales :

$$\text{v.p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(z)\ \mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \int_{a-iT}^{a+iT} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Enfin, la notation asymptotique d'Edmund Landau (1877–1938) :

$$\text{« } f(x) = \mathrm{O}(g(x)) \text{ lorsque } x \to x_0 \text{ »}$$

et celle d'Ivan Vinogradov (1891–1983) :

$$\text{« } f(x) \ll g(x) \text{ lorsque } x \to x_0 \text{ »}$$

signifieront toutes deux qu'il existe $C > 0$ et un voisinage V de x_0 tels que $|f(x)| \leq C\,|g(x)|$ pour tout $x \in V$.

0 Préliminaires

0.1 Deux fonctions d'Euler

Rappelons pour commencer la définition de la *fonction Gamma d'Euler*, pour $\sigma > 0$:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

Il s'agit d'une fonction analytique sur ce demi-plan, vérifiant $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi que :

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

On peut alors l'étendre au moyen de cette égalité pour $\sigma > -1$ avec $s \neq 0$, puis $\sigma > -2$ avec $s \neq -1$, etc. Cela fournit un prolongement analytique de $\Gamma(s)$ au plan complexe privé des entiers négatifs, vérifiant :

- l'identité suivante, due à Euler :
$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} \tag{0.1}$$
- la *formule des compléments* :
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \tag{0.2}$$
- la *formule de duplication de Legendre* :
$$\Gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right). \tag{0.3}$$

La formule des compléments montre également que $\Gamma(s)$ ne s'annule jamais. En particulier, $1/\Gamma$ est entière.

Rappelons également la définition de la *fonction Bêta d'Euler*, pour $x, y \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(x) > 0$ et $\mathrm{Re}(y) > 0$:

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t.$$

Cette définition peut se reformuler de plusieurs manières, en posant par exemple $t = \sin^2(\theta)$:

$$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)\ \mathrm{d}\theta \tag{0.4}$$

ou encore $u = 1/t - 1$:

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\ \mathrm{d}u. \tag{0.5}$$

Le théorème de Fubini-Tonelli permet enfin d'obtenir le résultat bien connu :

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{0.6}$$

0.2 Formule sommatoire de Poisson

La *transformée de Fourier* est un outil absolument incontournable en analyse. Elle est définie par la formule suivante, pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\ \mathrm{d}t.$$

Lorsque $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on dispose de la formule dite d'*inversion de Fourier*, valable presque partout :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega x}\ \mathrm{d}\omega.$$

Cette relation est en particulier valable lorsque f est continue en x. Enfin, lorsque $f \in \mathrm{L}^2(0, 2\pi)$, on définit ses *coefficients de Fourier* comme suit :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t.$$

Théorème 0.7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable, vérifiant :*

(i) *la famille $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable ;*

(ii) *il existe $C > 0$ et $\alpha > 1$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$|f(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha}.$$

Alors :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n).$$

Démonstration. Définissons la *périodisée par enroulement* de f :

$$g(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(y + 2k\pi).$$

Calculons ses coefficients de Fourier. L'hypothèse (ii) permet d'échanger la série et l'intégrale :

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(g) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(y + 2k\pi) \mathrm{e}^{-iky} \, \mathrm{d}y \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(t) \mathrm{e}^{-ikt} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

c'est-à-dire $2\pi c_n(g) = \hat{f}(n)$. De plus, g est continue en tant que somme d'une série normalement convergente de fonctions continues. L'hypothèse (i) garantit donc qu'elle est la somme de sa série de Fourier. □

0.3 Transformée de Mellin

Outre celle de Fourier, on rencontre fréquemment en analyse la transformée de Laplace :

$$\mathfrak{L}f(s) = \int_0^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t$$

et la transformée de Mellin. C'est de cette dernière dont nous aurons fréquemment besoin dans notre exposé.

Définition 0.8. *Soit $f : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ continue. Sa* transformée de Mellin *est définie par :*

$$\mathfrak{M}f(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} \, \mathrm{d}x.$$

Proposition 0.9. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ continue, vérifiant :*

(i) *$f(x) = \mathrm{O}(x^{-a})$ lorsque $x \to 0$;*

(ii) *$f(x) = \mathrm{O}(x^{-b})$ lorsque $x \to \infty$.*

Alors $\mathfrak{M}f(s)$ converge absolument sur la bande $a < \sigma < b$ et y définit une fonction holomorphe.

Démonstration. La continuité de $g_s(x) = f(x)x^{s-1}$ sur $(0,\infty)$ est claire. De plus :

$$g_s(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(x^{s-a-1}) \quad \text{et} \quad g_s(x) \underset{x\to\infty}{=} \mathrm{O}(x^{s-b-1})$$

ce qui garantit l'intégrabilité de g_s lorsque $\sigma \in (a,b)$. Enfin, g_s est holomorphe et dominée par :

$$h_s(x) = \begin{cases} c_1 x^{\sigma-a-1} & \text{si } x < 1, \\ c_2 x^{\sigma-b-1} & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$. Reste à appliquer le théorème d'holomorphie sous l'intégrale. □

Comme pour la transformée de Fourier, on dispose d'une formule d'*inversion de Mellin*, permettant de retrouver la fonction dont on ne dispose que de la transformée de Mellin.

Théorème 0.10. *Soit $f : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ continue, vérifiant :*

(i) *$f(x) = \mathrm{O}(x^{-a})$ lorsque $x \to 0$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$;*

(ii) *$f(x) = \mathrm{O}(x^{-b})$ lorsque $x \to \infty$ pour $b \in (0,\infty)$.*

Alors, pour tous $x \in (0,\infty)$ et $c \in (a,\infty)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathfrak{M}f(s)x^{-s}\,\mathrm{d}s.$$

Démonstration. La proposition 0.9 ainsi que les hypothèses (i) et (ii) assurent tout d'abord que $\mathfrak{M}f$ est bien définie et holomorphe sur (a,∞). Fixons $c \in (a,\infty)$ et considérons $s = c + i\tau$ où $\tau \in \mathbb{R}$, de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}f(s) &= \int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{(s-1)\log x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-ct}\mathrm{e}^{-it\tau}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{F}\{f(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-cx}\}(\tau). \end{aligned}$$

Donc par inversion de Fourier, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(\mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathfrak{M}f(c+it)\mathrm{e}^{cx}\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire, pour tout $x \in (0,\infty)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathfrak{M}f(c+it)x^{-(c+it)}\,\mathrm{d}t.$$ □

0.4 Un résultat d'intégration

Il est fréquent en analyse complexe de modifier des contours d'intégration. Par exemple, si U est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe, alors pour *tout* lacet γ tracé dans U :

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

En revanche, si f présente des pôles a_k à l'intérieur de γ, et si de plus γ est un lacet simple parcouru dans le sens trigonométrique, alors le théorème des résidus implique :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_k \mathrm{Res}(f, a_k).$$

Le résultat suivant formalise l'opération de déplacement d'une droite verticale d'intégration.

Proposition 0.11. *Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et f une fonction méromorphe de pôles $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ vérifiant :*

$$u < \mathrm{Re}(a_1) < \cdots < \mathrm{Re}(a_n) < v$$

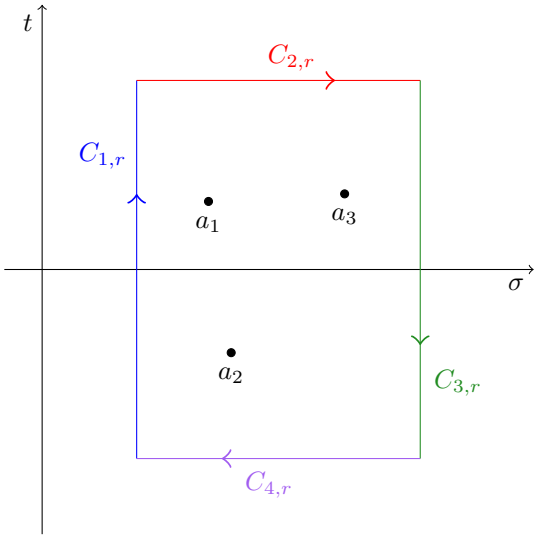
et telle que $f(x+iy) \to 0$ lorsque $|y| \to \infty$ uniformément en $x \in [u, v]$. Alors, sous réserve d'existence :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} f(z)\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{v+i\infty}^{v-i\infty} f(z)\ \mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f, a_k).$$

Démonstration. Considérons $r \in \mathbb{R}$ tel que $r > |\mathrm{Im}\, a_k|$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, et définissons :

$$A(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{u-ir}^{u+ir} f(z)\ \mathrm{d}z \quad ; \quad B(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{v-ir}^{v+ir} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Considérons également le contour $C_r = C_{1,r} \cup C_{2,r} \cup C_{3,r} \cup C_{4,r}$ défini comme suit.



Les segments $C_{1,r}$ et $C_{3,r}$ ont pour abscisses respectives u et v, tandis que $C_{2,r}$ et $C_{4,r}$ ont pour ordonnées respectives r et $-r$. D'après le théorème des résidus, puisque C_r est un lacet simple parcouru dans le sens trigonométrique inverse :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C,r} f(z)\ \mathrm{d}z = -\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f, a_k)$$

c'est-à-dire :

$$A(r) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2,r}} f(z)\ \mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{4,r}} f(z)\ \mathrm{d}z = -B(r) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k). \tag{0.12}$$

Puisque $f(x+iy) \to 0$ lorsque $y \to \infty$ uniformément en $x \in [u, v]$, et que $C_{2,r}$ et $C_{4,r}$ sont de longueur finie égale à $v-u$, par convergence dominée :

$$\int_{C_{2,r}} f(z)\ \mathrm{d}z \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \int_{C_{4,r}} f(z)\ \mathrm{d}z \xrightarrow[r\to\infty]{} 0.$$

Si maintenant $A(r)$ et $B(r)$ ont une limite lorsque $r \to \infty$, on peut passer à la limite dans (0.12). □

Remarque. Ce résultat reste vrai si l'intégrale de f sur une certaine suite de segments horizontaux est nulle ou négligeable. Par exemple, s'il existe deux suites (α_k) et (β_k) qui ont une limite (potentiellement infinie) et vérifient, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_k, \beta_k > |\mathrm{Im}\, a_1|, \ldots, |\mathrm{Im}\, a_n|$$

ainsi que :

$$\int_{u-i\alpha_k}^{v-i\alpha_k} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{u+i\beta_k}^{v+i\beta_k} f(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

alors on peut encore passer à la limite (cette fois sur k seulement) dans l'égalité (0.12).

1 Fonction zêta de Riemann

1.1 Définition et premières propriétés

Nous commençons par énoncer les propriétés dites usuelles de la fonction zêta de Riemann.

Définition 1.1. *La* fonction zêta de Riemann *est définie, pour $\sigma > 1$, par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

La première approche d'Euler au calcul de la valeur de $\zeta(2)$, connu sous le nom de *problème de Bâle*, consiste à transposer des résultats sur les polynômes aux séries entières, notamment celui de la factorisation via les racines. Euler utilise alors l'expression suivante, qui découlera d'un théorème démontré une centaine d'années plus tard par Karl Weierstrass (1815–1897) :

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots$$

Dans ce produit, on constate que le coefficient de x^2 est :

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2}\right) = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

et on peut alors l'identifier à celui du développement en série entière associé, qui vaut $-1/6$. Ce résultat se généralise aux entiers pairs, et Euler a démontré :

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}\,|B_{2n}|}{(2n)!}$$

où les B_{2n} sont les nombres de Bernoulli. Les propriétés connues des $\zeta(2n+1)$ sont quant à elles assez peu nombreuses. En 1978, Roger Apéry a démontré l'irrationnalité de $\zeta(3)$ [Apé79]. Plus récemment, en 2000, Tanguy Rivoal a prouvé que les $\zeta(2n+1)$ comportent une infinité d'irrationnels [Riv00]. L'année suivante, Wadim Zudilin a démontré qu'au moins l'un des nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ est irrationnel [Zud01].

Proposition 1.2. *La fonction ζ est analytique sur le demi-plan $\sigma > 1$, présente un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1, et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\sigma > 0$. Plus précisément, si $\sigma > 1$, alors :*

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \psi(s)$$

où ψ est une fonction holomorphe sur $\sigma > 0$.

Démonstration. La série $\sum n^{-s}$ est une série de fonctions analytiques qui converge uniformément sur tout compact du demi-plan $\sigma > 1$, donc leur somme y est analytique. Pour le second point, notons d'abord que :

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty}\frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t.$$

On constate sans difficulté que pour $t \in (0, \infty)$:

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} = \int_n^t \frac{s}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x$$

ce qui assure la converge absolue de la série associée lorsque $\sigma > 0$. En effet :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_n^{n+1}\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma}{n^{\sigma+1}} < \infty.$$

Il suffit alors de poser, pour $\sigma > 0$:

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \, \mathrm{d}t.$$

□

Proposition 1.3. *Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma > 1$:*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Démonstration. Notons $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ et considérons $q = p_r \in \mathbb{P}$. Pour $p \in \mathbb{P}$, on sait que :

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}$$

et cette série étant absolument convergente, on peut sommer ses termes dans n'importe quel ordre :

$$\prod_{p \leq q} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} p_1^{-k_1 s} \right) \cdots \left(\sum_{k_r=0}^{\infty} p_r^{-k_r s} \right) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_r=0}^{\infty} \left(p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} \right)^{-s}.$$

Les termes du membre de droite sont donc de la forme n^{-s} où n est un produit de nombres premiers, tous inférieurs à q. En particulier, tous les entiers naturels inférieurs à q y apparaissent. Par conséquent :

$$\left| \zeta(s) - \prod_{p \leq q} \frac{1}{1 - p^{-s}} \right| \leq \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$$

et le membre de droite tend vers 0 lorsque $r \to \infty$, puisque $\sigma > 1$. □

Proposition 1.4. *La fonction ζ ne s'annule pas sur le demi-plan $\sigma \geq 1$.*

Démonstration. Si $\sigma > 1$, on déduit de l'expression du produit eulérien :

$$\log |\zeta(s)| = - \sum_{p \in \mathbb{P}} \log \left| 1 - p^{-s} \right| = - \operatorname{Re} \left(\sum_{p \in \mathbb{P}} \log \left(1 - p^{-s} \right) \right)$$

et on peut expliciter davantage la somme :

$$\log |\zeta(s)| = \operatorname{Re} \left(\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k p^{ks}} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right)$$

où les a_n sont des réels *positifs*, donc $\log |\zeta(s)|$ ne peut diverger.

Lorsque $\sigma = 1$, c'est plus subtil. Voici un argument dû à Franz Mertens (1840–1927). La clé est l'inégalité :

$$3 + 4 \cos \theta + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0.$$

En effet, pour trois réels $\alpha, \beta, \gamma > 0$:

$$\log \left| \zeta(\sigma)^{\alpha} \zeta(\sigma + it)^{\beta} \zeta(\sigma + \gamma it) \right| = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma}} \left(\alpha + \beta n^{-it} + n^{-\gamma it} \right) \right).$$

Supposons alors qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\zeta(1 + it_0) = 0$, et définissons la fonction auxiliaire :

$$h(s) = \zeta(s)^3 \zeta(s + it_0)^4 \zeta(s + 2it_0).$$

Ainsi, $1+it_0$ est un zéro de $\zeta(s)^4$ d'ordre au moins 4, donc $h(1)=0$. Par conséquent :

$$\lim_{s\to 1}\log|h(s)| = -\infty.$$

Mais cette quantité est positive ! En effet :

$$\begin{aligned}\log|h(s)| &= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}\left(3+4n^{-it}+n^{-2it}\right)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}\left(3+4\cos(t\log n)+\cos(2t\log n)\right)\geq 0\end{aligned}$$

et cela l'empêche de diverger vers $-\infty$ lorsque $s\to 1$. □

1.2 L'équation fonctionnelle

Nous allons démontrer le résultat suivant de deux manières différentes.

Proposition 1.5. *La fonction $s\longmapsto(s-1)\zeta(s)$ admet un prolongement analytique au plan complexe, et pour tout $s\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$:*

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

1.2.1 Par une intégrale de contour

La méthode la plus classique consiste à utiliser un *contour de Hankel*, mais nous la réservons pour l'équation fonctionnelle des $L(s,\chi)$. Voici donc une méthode simple et efficace due à Keith Ball [Bal22].

Lemme 1.6. *Pour tout $s\in(1,\infty)$:*

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{1}{4s}\int_0^\infty \frac{t^s}{\sinh^2(t/2)}\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. On part de la définition de $\Gamma(s)$:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty u^{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nu}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty\frac{u^{s-1}}{\mathrm{e}^u-1}\,\mathrm{d}u$$

puis en intégrant par parties, on obtient :

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^u u^s}{(\mathrm{e}^u-1)^2}\,\mathrm{d}u$$

et on conclut en utilisant la formule de l'angle milieu :

$$\mathrm{e}^u-1 = \mathrm{e}^{u/2}\left(\sinh\left(\frac{u}{2}\right)-1\right).$$ □

Fixons maintenant $s\in\mathbb{C}$ et considérons la fonction :

$$f(z) = \frac{\pi^2 z^{1-s}}{\sin^2(\pi z)}.$$

Il s'agit d'une fonction méromorphe, dont les pôles sont les entiers relatifs non nuls, avec :

$$\mathrm{Res}(f,n) = \lim_{z\to n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-n)^2 f(z)\right) = \frac{1-s}{n^s}.$$

Fixons maintenant $\sigma \in (0,1)$ (par exemple $\sigma = 1/2$) de façon à « éviter » les pôles, et posons :

$$I(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} f(z)\, \mathrm{d}z.$$

C'est une fonction entière de s, essentiellement car le sinus croît exponentiellement lorsqu'on s'éloigne de l'axe des réels, ce qui assure également que $f(x+iy) \to 0$ lorsque $y \to \infty$ uniformément en x. Supposons d'abord que $s \in (1, \infty)$ de sorte que $f(x+iy) \to 0$ lorsque $x \to \infty$, uniformément en y. D'après la proposition 0.11 :

$$I(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Res}(f, n) = (s-1)\zeta(s).$$

Supposons à présent $s \in (-\infty, 0)$. Puisque f ne présente pas de pôle en 0, on peut alors déplacer le contour sur l'axe des imaginaires afin de simplifier le calcul :

$$\begin{aligned} 2\pi i I(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(it) i \, \mathrm{d}t &= i \int_0^{\infty} \frac{\pi^2 t^{1-s} (-i)^{1-s}}{\sinh^2 t} \, \mathrm{d}t - i \int_0^{\infty} \frac{\pi^2 t^{1-s} i^{1-s}}{\sinh^2 t} \, \mathrm{d}t \\ &= -i\pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-s)\right) \int_0^{\infty} \frac{t^{1-s}}{\sinh^2(\pi t)} \, \mathrm{d}t \\ &= i\pi^2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \int_0^{\infty} \frac{t^{1-s}}{\sinh^2(\pi t)} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = 2\pi t$ et à l'aide du lemme 1.6, on obtient :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{1-s}}{\sinh^2(\pi t)} \, \mathrm{d}t = (2\pi)^s \int_0^{\infty} \frac{u^{1-s}}{\sinh^2(u/2)} \, \mathrm{d}u = 4(2\pi)^s \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

et on en déduit finalement, pour $s \in (-\infty, 0)$:

$$I(s) = (s-1) 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

ce qui fournit un prolongement analytique pour $(s-1)\zeta(s)$ et donne l'équation fonctionnelle souhaitée.

1.2.2 Par la fonction thêta de Jacobi

Définition 1.7. *La* fonction thêta de Jacobi *est définie, pour $\tau \in \mathbb{H}$ et $z \in \mathbb{C}$, par :*

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(\pi i \tau n^2 + 2\pi i n z\right).$$

Dans toute la suite, on prendra $\tau = it$ avec $t > 0$ et $z = 0$, et on notera donc :

$$\vartheta(t) = \vartheta(0, it) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-n^2 \pi t\right).$$

Proposition 1.8. *Pour tout $t \in (0, \infty)$:*

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \vartheta\left(\frac{1}{t}\right).$$

Démonstration. On applique la formule sommatoire de Poisson à la fonction :

$$f(x) = \exp\left(-\frac{t x^2}{4\pi}\right)$$

dont la transformée de Fourier est :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2\pi}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\pi\omega^2}{t}\right). \qquad \square$$

Une première idée peut être de s'intéresser à la transformée de Mellin :

$$\mathfrak{M}\vartheta(s) = \int_0^\infty \vartheta(t) t^{s-1} \, \mathrm{d}t$$

mais l'intégrale ne converge pour aucune valeur de s ! Seul le terme $n = 0$ pose problème dans la série, il est donc d'usage de définir la fonction modifiée :

$$\psi(t) = \frac{\vartheta(t) - 1}{2} \tag{1.9}$$

pour y remédier. Nous allons plutôt découper l'intégrale en deux en ôtant à $\vartheta(t)$ ses équivalents au niveau des bornes problématiques. De la définition 1.7 et de la proposition 1.8, on déduit :

$$\vartheta(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad ; \quad \vartheta(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$$

ce qui nous incite à poser :

$$\phi(s) = \int_0^1 \left(\vartheta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) t^{(s/2)-1} \, \mathrm{d}t + \int_1^\infty (\vartheta(t) - 1) t^{(s/2)-1} \, \mathrm{d}t.$$

On constate que ϕ est une fonction entière, puisqu'on peut l'écrire comme une série normalement convergente de fonctions entières. En échangeant série et intégrale et via le changement de variable $x = n^2\pi t$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\vartheta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) t^{(s/2)-1} \, \mathrm{d}t &= 2\pi^{-s/2}\zeta(s) \int_0^1 x^{(s/2)-1}\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x + \int_0^1 t^{(s/2)-1} \, \mathrm{d}t - \int_0^1 t^{(s/2)-2} \, \mathrm{d}t \\ &= 2\pi^{-s/2}\zeta(s) \int_0^1 x^{(s/2)-1}\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x + \frac{2}{s} - \frac{2}{s-1}\end{aligned}$$

et de même avec le second terme :

$$\begin{aligned}\int_1^\infty (\vartheta(t) - 1) t^{(s/2)-1} \, \mathrm{d}t &= \sum_{|n|\geq 1} \int_1^\infty t^{(s/2)-1}\mathrm{e}^{-n^2\pi t} \, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{|n|\geq 1} \frac{1}{(n^2\pi)^{s/2}} \int_1^\infty x^{(s/2)-1}\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x \\ &= 2\pi^{-s/2}\zeta(s) \int_1^\infty x^{(s/2)-1}\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

ce qui peut se réécrire à l'aide de la fonction ψ :

$$\mathfrak{M}\psi\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right). \tag{1.10}$$

Nous avons donc montré que, pour $\sigma > 1$:

$$\frac{1}{2}\phi(s) = \pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}. \tag{1.11}$$

De plus, à l'aide de la proposition 1.8, on montre facilement que $\phi(s) = \phi(1-s)$ en effectuant le changement de variable $u = 1/t$ dans chacune des intégrales. Pour $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, on peut alors prolonger $\zeta(s)$ à l'aide de l'égalité (1.11). De la symétrie de ϕ par rapport à la *droite critique* $\sigma = 1/2$, on déduit :

$$\zeta(s) = \pi s - \frac{1}{2}\zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1}$$

puis, d'après la formule des compléments :

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\zeta(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)$$

et on conclut grâce à la formule de duplication de Legendre, qui fournit l'égalité :

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) = 2^s\sqrt{\pi}\Gamma(1-s). \tag{1.12}$$

Un calcul de limite permet d'ailleurs de montrer que $\zeta(s)$ n'a pas de pôle en $s = 0$ (cf. proposition 1.14).

Notons enfin que l'équation fonctionnelle peut se réécrire sous la forme symétrique $\xi(s) = \xi(1-s)$, avec :

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right). \tag{1.13}$$

Remarque. Prenons $s = -1$ dans l'équation fonctionnelle :

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{2\pi^2}\Gamma(2)\zeta(2) = -\frac{1}{12}.$$

Ceci explique le célèbre « résultat » qui prétend que la somme des entiers naturels « vaut » $-1/12$. Ce n'est pas le seul endroit où l'on retrouve cette mystérieuse valeur. On peut en effet montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{12} + \mathrm{O}(x).$$

Il existe également un procédé de sommation dû à Srinivasa Ramanujan (1887–1920) permettant d'attribuer une valeur aux séries divergentes, pour des fonctions f suffisamment régulières et à croissance « adaptée » :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \overset{(\mathfrak{R})}{=} \frac{f(0)}{2} + i\int_0^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{\mathrm{e}^{2\pi t} - 1}\,\mathrm{d}t.$$

En prenant $f(n) = n$ et en utilisant $\zeta(2) = \pi^2/6$, on obtient $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \overset{(\mathfrak{R})}{=} -1/12$.

1.3 Les zéros et l'hypothèse de Riemann

On peut déjà observer à l'aide de l'équation fonctionnelle que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\zeta(-2n) = 2^{-2n}\pi^{-2n-1}\sin(-n\pi)\Gamma(2n+1)\zeta(2n+1) = 0.$$

Ce sont les zéros dits *triviaux* de la fonction zêta. Mais alors, où se situent les autres ?

Proposition 1.14. *Les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ se situent tous dans la bande $0 < \sigma < 1$.*

Démonstration. La proposition 1.4 assure déjà que $\zeta(s) \neq 0$ si $\sigma \geq 1$. Par ailleurs, la proposition 1.2 entraîne :

$$\zeta(0) = \lim_{s\to 0} 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\pi s}{2}\frac{1}{1-s-1} = -\frac{1}{2}.$$

Supposons maintenant $\sigma \geq 0$ et $s \neq -2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas $\mathrm{Re}(1-s) = 1-\sigma \geq 1$, et les autres facteurs dans l'équation fonctionnelle ne sont pas nuls : $\sin(z)$ ne s'annule pas lorsque $z \notin \pi\mathbb{Z}$, les fonctions puissance ne s'annulent jamais et $\Gamma(s)$ non plus. □

Selon Riemann, le nombre de zéros non triviaux dont la partie imaginaire est comprise entre 0 et T vaut approximativement :

$$N(T) \approx \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}$$

et que l'erreur est de l'ordre de $1/T$ [Rie59]. Il affirme également que cette approximation vaut également pour les zéros situés sur la *droite critique* $\sigma = 1/2$, sans préciser dans quel sens. On peut penser que cela sous-entend que le terme d'erreur tend vers 0 lorsque $T \to \infty$. Personne n'a su démontrer ce résultat, mais on imagine que c'est ce qui a mené Riemann à conjecturer que *tous* les zéros non triviaux ont pour partie réelle $1/2$, problème connu aujourd'hui sous le nom d'*hypothèse de Riemann*, et toujours non résolu.

1.4 Infinité des zéros sur la droite critique

En 1908, Ernst Lindelöf (1870–1946) a démontré [Lin08] :

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=\mathrm{O}(t^{1/4}) \tag{1.15}$$

et l'*hypothèse de Lindelöf* stipule que $1/4$ peut être remplacé par tout $\varepsilon>0$. Nous allons déjà prouver que la fonction zêta s'annule une infinité de fois sur la droite critique. Nous introduisons pour ce faire, pour $t\in\mathbb{R}$:

$$\Xi(t)=\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

qui est paire et à valeurs réelles en vertu de l'équation $\xi(s)=\xi(1-s)$ et du principe de réflexion de Schwarz.

Lemme 1.16. *Pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|\operatorname{Im} z|<\pi/4$:*

$$\int_0^\infty \frac{\Xi(t)\cos(zt)}{t^2+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{z/2}-\pi\mathrm{e}^{-z/2}\psi(\mathrm{e}^{-2z}).$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que $z=x\in\mathbb{R}$ et notons :

$$Q(x)=\int_0^\infty \frac{\Xi(t)\cos(xt)}{t^2+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t.$$

Par parité de $t\longmapsto\Xi(t)\cos(xt)(t^2+1/4)^{-1}$ et par imparité de $t\longmapsto\Xi(t)\sin(xt)(t^2+1/4)^{-1}$:

$$Q(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)\frac{\mathrm{e}^{ixt}}{t^2+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2i}\mathrm{e}^{-x/2}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\frac{1}{s(1-s)}\xi(s)\mathrm{e}^{xs}\,\mathrm{d}s.$$

Par conséquent, d'après (1.13) :

$$Q(x)=-\frac{1}{4i}\mathrm{e}^{-x/2}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}f(s)\,\mathrm{d}s\quad\text{avec}\quad f(s)=\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\mathrm{e}^{xs}. \tag{1.17}$$

D'après la proposition 0.11, pour $a\in(1,\infty)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2-i\infty}f(s)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}f(s)\,\mathrm{d}s-\operatorname{Res}(f,1)$$

et puisque 1 est un pôle simple de f :

$$\operatorname{Res}(f,1)=\lim_{s\to1}(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\mathrm{e}^{xs}=\mathrm{e}^x$$

donc avec (1.17), il vient :

$$Q(x)=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-x/2}\left(\mathrm{e}^x-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}f(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Enfin, par inversion de Mellin et d'après (1.10) :

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}f(s)\,\mathrm{d}s=\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(\mathrm{e}^{-x})^{-s}\,\mathrm{d}s=4\pi i\psi(\mathrm{e}^{-2x})$$

ce qui donne le résultat attendu. On l'étend à $|\operatorname{Im} z|<\pi/4$ par prolongement analytique. □

Lemme 1.18. *Toutes les dérivées de la fonction :*

$$h(\alpha) = \mathrm{e}^{i\alpha/2}\left(\frac{1}{2} + \psi(\mathrm{e}^{2i\alpha})\right)$$

tendent vers zéro lorsque $\alpha \uparrow \pi/4$.

Démonstration. Soit $\delta > 0$. Puisque n et n^2 ont même parité :

$$\psi(i+\delta) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \mathrm{e}^{-\pi\delta n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-4\pi\delta n^2} - \psi(\delta) = 2\psi(4\delta) - \psi(\delta). \tag{1.19}$$

La proposition 1.8 se réécrit à l'aide de $\psi(x)$ comme suit :

$$2\psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right) \tag{1.20}$$

ce qui entraîne, avec (1.19) :

$$\frac{1}{2} + \psi(i+\delta) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi}{4\delta}\right) - \exp\left(-\frac{n^2\pi}{\delta}\right).$$

Examinons la dérivée première de cette expression :

$$\psi'(i+\delta) = -\frac{1}{2\delta^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi}{4\delta}\right) - \exp\left(-\frac{n^2\pi}{\delta}\right) + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi}{4\delta^2}\exp\left(-\frac{n^2\pi}{4\delta}\right) - \frac{n^2\pi}{\delta}\exp\left(-\frac{n^2\pi}{\delta}\right).$$

On arrive facilement à se convaincre que pour les dérivées successives, on obtient une expression de la forme :

$$\psi^{(k)}(i+\delta) = A_k(\delta^{-1/2})\sum_{n=1}^{\infty}B_k(n^2,\delta^{-1})\exp\left(-\frac{n^2\pi}{4\delta}\right) + C_k(\delta^{-1/2})\sum_{n=1}^{\infty}D_k(n^2,\delta^{-1})\exp\left(-\frac{n^2\pi}{\delta}\right)$$

avec $A_k, C_k \in \mathbb{R}[X]$ et $B_k, D_k \in \mathbb{R}[X,Y]$. On constate alors sans difficulté que $\psi^{(k)}(i+\delta) \to 0$ lorsque $\delta \downarrow 0$. Cet argument s'étend à tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z-i) = \mathrm{Re}(z) > 0$, puisque :

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi}{|z-i|}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi\,\mathrm{Re}(z-i)}{|z-i|^2}\right) = \psi\left(\frac{\mathrm{Re}(z-i)}{|z-i|^2}\right)$$

et toutes ses dérivées du membre de droite tendent vers 0 lorsque $z \to i$, en restant dans un chemin sur lequel $\arg(z-i) < \pi/2$. La formule de Leibniz permet de conclure. □

Théorème 1.21 (Hardy, 1914). *La fonction ζ s'annule une infinité de fois sur la droite critique.*

Démonstration. Appliquons la proposition 1.16 à $x = -i\alpha$ avec $\alpha \in (0, \pi/4)$:

$$\int_0^\infty \frac{\Xi(t)\cosh(\alpha t)}{t^2+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{i\alpha/2} - \pi\mathrm{e}^{-i\alpha/2}\psi(\mathrm{e}^{2i\alpha}) = \pi\cos(\alpha/2) - \pi h(\alpha)$$

où la fonction h a été introduite dans la proposition 1.18. La formule de Stirling fournit l'estimation :

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right) \ll \left(\frac{1}{2}+it\right)^{it/2-1/4} \ll t^{-1/4}\mathrm{e}^{-\pi t/4}$$

et en vertu de (1.15), cela nous permet de dériver sous l'intégrale $2n$ fois par rapport à α :

$$\int_0^\infty \frac{\Xi(t)\cosh(\alpha t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n\pi}{4^n}\cos(\alpha/2) - \pi h^{(n)}(\alpha).$$

Supposons par l'absurde que $\Xi(t)$ ne possède qu'un nombre fini de zéros. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe $T > 0$ tel que $\Xi(t) > 0$ pour tout $t > T$ (le cas $\Xi(t) < 0$ est analogue). Notons alors :

$$L_n = \lim_{\alpha\uparrow\pi/4}\int_T^\infty \frac{\Xi(t)\cosh(\alpha t)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\,\mathrm{d}t.$$

Comme l'intégrande est positif, pour tout $T' > T$, par convergence dominée :

$$\int_T^{T'} \frac{\Xi(t)\cosh(\pi t/4)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\,\mathrm{d}t \le L_n$$

donc l'intégrale sur $(0,\infty)$ converge absolument, et d'après la proposition 1.18 :

$$\frac{(-1)^n}{4^n}\pi\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \int_0^\infty t^{2n}\frac{\Xi(t)\cosh(\pi t/4)}{t^2+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ impair :

$$\int_T^\infty \frac{\Xi(t)\cosh(\pi t/4)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\,\mathrm{d}t \le \frac{(-1)^n}{4^n}\pi\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \int_0^T \frac{\Xi(t)\cosh(\pi t/4)}{t^2+\frac{1}{4}}t^{2n}\,\mathrm{d}t < T^{2n}I(T)$$

où $I(T) > 0$ ne dépend pas de n. Mais l'intégrande est strictement positif dès que $t > T$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in (2T, 2T+1)$:

$$\frac{\Xi(t)\cosh(\pi t/4)}{t^2+\frac{1}{4}} \ge \frac{\varepsilon}{t^{2n}}$$

et on aboutit à $4^n\varepsilon \le I(T)$ pour tout entier n impair, ce qui est impossible. □

Ce résultat signifie donc que $N_0(T) \to \infty$ lorsque $T \to \infty$, où $N_0(T)$ désigne le nombre de zéros non triviaux situés sur la *droite critique* $\sigma = 1/2$, dont la partie imaginaire est comprise entre 0 et T. Rappelons que $N(T)$ est le nombre de zéros de partie imaginaire comprise entre 0 et T, mais sans hypothèse sur leur partie réelle.

En 1921, Godfrey Hardy (1877–1947) et John Littlewood (1885–1977) ont montré que $N_0(T) \ge CT$ pour T suffisamment grand, où $C > 0$ est une constante [HL21]. En 1942, Atle Selberg (1917–2007) a amélioré ce résultat en $N_0(T) \ge CT\log T$ [Sel42]. Le travail s'est par la suite concentré sur l'estimation du rapport $N_0(T)/N(T)$. On sait depuis 1974 qu'il vaut au moins 1/3. En effet, Norman Levinson (1912–1975) a démontré [Lev74] :

$$\frac{N_0(T+U(T)) - N_0(T)}{N(T+U(T)) - N(T)} > \frac{1}{3} \quad \text{avec} \quad U(T) = \frac{T}{(\log T - \log 2\pi)^{10}}.$$

En améliorant la méthode de Levinson, Brian Conrey a obtenu en 1989 [Con89] :

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{N_0(T)}{N(T)} \ge 0.4088.$$

La meilleure borne inférieure connue à ce jour a été obtenue en 2011, et vaut 0.4105 [CBY11].

2 Séries de Dirichlet

Nous allons voir que la définition de la fonction zêta de Riemann se généralise facilement, en remplaçant le numérateur de chaque terme par une certaine suite, et qu'un lien inattendu avec l'arithmétique va apparaître.

2.1 Fonctions multiplicatives et convolution

Définition 2.1. *Une fonction* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ *est appelée* arithmétique*, et est dite* multiplicative *lorsque* $f(1) = 1$ *et* $f(mn) = f(m)f(n)$ *pour tous entiers* m *et* n *premiers entre eux.*

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques multiplicatives. En voici quelques éléments bien connus :

- l'indicatrice du singleton $\{1\}$:
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
- la *fonction de Möbius* :
$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré parfait strictement supérieur à 1,} \\ (-1)^{\omega(n)} & \text{sinon, où } \omega(n) \text{ est le nombre de facteurs premiers distincts de } n, \end{cases}$$
- la *fonction de von Mangoldt* :
$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \text{ avec } p \in \mathbb{P} \text{ et } k \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
- la *fonction indicatrice d'Euler* : $\varphi(n) = \operatorname{card}\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \operatorname{pgcd}(k, n) = 1\}$,
- la *fonction somme des diviseurs* : $\sigma(n) = \sum_{k|n} k$,
- la *fonction nombre de diviseurs* : $d(n) = \sum_{k|n} 1$.

Définition 2.2. *Si* $f, g \in \mathcal{M}$*, on définit leur* convolution de Dirichlet *par :*
$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \sum_{ab=n} f(a)g(b).$$

Proposition 2.3. *Le couple* $(\mathcal{M}, \star)$ *est un groupe abélien, de neutre multiplicatif* δ*.*

Par exemple, en partitionnant les éléments du groupe cyclique d'ordre n selon leurs ordres, il vient $\varphi \star 1 = \mathrm{id}$. De l'égalité $\delta = \mu \star 1$, on déduit également la *formule d'inversion de Möbius* :
$$f = g \star 1 \implies g = f \star \mu.$$

2.2 Convolution et produit de séries

Définition 2.4. *Si* $(a_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de nombres complexes, on définit sa* série de Dirichlet *par :*
$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Il existe une définition plus générale, associant à une suite de complexes $(a_n)_{n\geq 1}$ et une suite de réels $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ positive, strictement croissante et non majorée, la série :
$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-s\lambda_n}.$$

Si $f \in \mathcal{M}$, on désignera par $D(f)(s)$ la série de Dirichlet associée à $(f(n))_{n\geq 1}$. Par exemple, pour $\sigma > 1$:

$$D(1)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

Proposition 2.5. *Soient $f, g \in \mathcal{M}$ et $s \in \mathbb{C}$ tels que $D(f)(s)$ et $D(g)(s)$ convergent absolument. Alors il en est de même de $D(f \star g)(s)$, et :*

$$D(f \star g)(s) = D(f)(s)D(g)(s).$$

Démonstration. On somme par paquets à l'aide de la réunion disjointe :

$$(\mathbb{N}^*)^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid ab = n\right\}. \qquad \square$$

Corollaire 2.6. *Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma > 1$:*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$(\Lambda \star 1)(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{p|n} v_p(n) \log p = \log n$$

puisque chaque puissance d'un facteur premier de n apparaît $v_p(n)$ fois, et tous les autres diviseurs d vérifient par définition $\Lambda(d) = 0$. Par conséquent, $\Lambda \star 1 = \log$, et la proposition 2.5 permet de conclure. $\square$

Corollaire 2.7. *Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma > 1$:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta^2(s).$$

Démonstration. Découle immédiatement de l'identité $d = 1 \star 1$ et de la proposition 2.5. $\square$

On peut obtenir bien des formules du même acabit grâce à la convolution. Par exemple, pour $\sigma > 1$:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

et pour $\sigma > 2$:

$$\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} \quad ; \quad \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}.$$

3 Liens avec les nombres premiers

Nous avons vu qu'il existait un lien entre les nombres premiers et l'analyse complexe, par l'intermédiaire de la fonction zêta. Ce lien est en fait bien plus profond, et nous allons voir que la répartition des nombres premiers est étroitement liée aux zéros non triviaux de la fonction zêta. Nous allons d'abord démontrer le théorème des nombres premiers grâce à un résultat établi par Shikao Ikehara [Ike31].

3.1 Le théorème de Wiener-Ikehara

Nous présentons un premier résultat qui permettra d'en déduire ledit théorème.

Théorème 3.1. *Soit $f : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ bornée et localement intégrable. Pour $\sigma > 0$, on pose :*

$$g(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\ \mathrm{d}t.$$

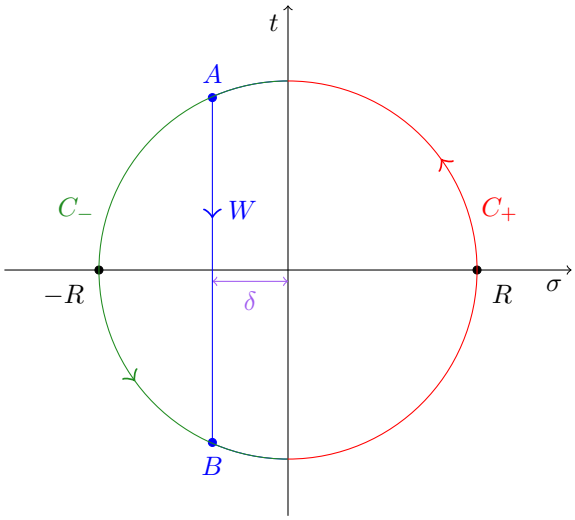
Si g admet un prolongement analytique au demi-plan $\sigma \geq 0$, alors f est intégrable et :

$$\int_0^\infty f(t)\ \mathrm{d}t = g(0).$$

Démonstration. Soit $T \in (0, \infty)$. On note $M = \sup |f|$ et on pose :

$$g_T(s) = \int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-st}\ \mathrm{d}t.$$

L'objectif est de montrer que $|g(0) - g_T(0)| \to 0$ lorsque $T \to \infty$. Le théorème d'holomorphie sous l'intégrale et l'intégrabilité locale de f assurent d'abord que g_T est entière. L'idée est d'exprimer $g(0) - g_T(0)$ comme une intégrale sur un contour bien choisi. Comme g est analytique sur $\{\sigma \geq 0\}$ et que $\{\sigma = 0\} \cap \{|t| \leq R\}$ est compact, on peut trouver $\delta > 0$ tel que g soit analytique sur $\{\sigma \geq -\delta\} \cap \{|t| \leq R\}$. Fixons alors $R > 0$ et considérons le lacet $U = C_+ \cup W$ défini comme suit.



D'après le théorème des résidus :

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{g(s) - g_T(s)}{s}\ \mathrm{d}s. \tag{3.2}$$

On a alors, pour $\sigma > 0$:

$$|g(s) - g_T(s)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_T^\infty f(s)\mathrm{e}^{-sT}\ \mathrm{d}s\right| \leq \frac{M}{\sigma}\mathrm{e}^{-\sigma T} \tag{3.3}$$

et pour $\sigma < 0$:

$$|g_T(s)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^T f(s) \mathrm{e}^{-sT} \, \mathrm{d}s \right| \leq \frac{M}{\sigma} \left| 1 - \mathrm{e}^{-sT} \right| \leq \frac{2M}{|\sigma|} \mathrm{e}^{|\sigma| T}. \tag{3.4}$$

Afin de compenser le terme exponentiel, on peut multiplier l'intégrande par e^{sT} sans changer le résultat, puisque c'est un terme qui vaut 1 en $s = 0$. Par ailleurs, on souhaite également éviter d'avoir σ au dénominateur, car son inverse explose lorsqu'on se rapproche de l'axe des imaginaires. Une astuce consiste alors à multiplier l'intégrande par $1 + s^2/R^2$! Par le même argument, cela ne modifie pas le résultat. Ainsi, (3.2) devient :

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_U \frac{g(s) - g_T(s)}{s} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \mathrm{e}^{sT} \, \mathrm{d}s.$$

On peut à présent estimer cette intégrale. Tout d'abord, pour $s = R\mathrm{e}^{i\theta} \in C_+$:

$$\frac{1}{s} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) = \frac{1}{R\mathrm{e}^{i\theta}} \left(1 + \mathrm{e}^{2i\theta} \right) = \frac{2 \cos \theta}{R} \tag{3.5}$$

donc d'après (3.3), puisque $\sigma = R \cos \theta$:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{g(s) - g_T(s)}{s} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \mathrm{e}^{sT} \, \mathrm{d}s \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2 \cos \theta}{R} \frac{M}{\sigma} \mathrm{e}^{\sigma T} \mathrm{e}^{-\sigma T} \pi R \ll \frac{1}{R}. \tag{3.6}$$

On scinde à présent l'intégrale sur W en deux parties :

$$I_1(T) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{g_T(s)}{s} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \mathrm{e}^{sT} \, \mathrm{d}s \quad ; \quad I_2(T) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{g(s)}{s} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \mathrm{e}^{sT} \, \mathrm{d}s.$$

Comme l'intégrande est une fonction entière, on ne change pas la valeur de $I_1(T)$ en ajoutant un lacet simple au contour, en l'occurrence celui allant des points A à B en passant par C_-, puis empruntant le chemin W dans le sens contraire. Par conséquent :

$$I_1(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{g_T(s)}{s} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \mathrm{e}^{sT} \, \mathrm{d}s.$$

De plus, par une estimation similaire à (3.3) et à l'aide de (3.4), on obtient :

$$I_1(T) \ll \frac{1}{R} \tag{3.7}$$

et ceci uniformément en T. Pour $I_2(T)$ c'est un peu plus délicat, et nous allons la scinder en deux parties. Notons $S = W \cap \{|s| = R\}$, et $V = W \cap \{t = -\delta\}$. L'égalité (3.5) étant encore valable sur S, il vient :

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{g(s)}{s} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \mathrm{e}^{sT} \, \mathrm{d}s \right| \leq \frac{a(R)}{R^2} |\sigma| \, \mathrm{e}^{\sigma T}$$

où $a(R) > 0$ ne dépend que de R. En effet, g est continue sur un compact contenant W donc elle y est bornée par une fonction de R uniquement, et la longueur de S ne dépend que de R. Puisque $x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ atteint un maximum global en $x = 1$, on peut préciser l'estimation :

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{g(s)}{s} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \mathrm{e}^{sT} \, \mathrm{d}s \right| \leq \frac{a(R)}{R^2} \frac{\mathrm{e}}{T}. \tag{3.8}$$

Enfin, si $s \in V$ alors $\left| \mathrm{e}^{sT} \right| = \mathrm{e}^{-\delta T}$, ce qui donne :

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_V \frac{g(s)}{s} \left(1 + \frac{s^2}{R^2} \right) \mathrm{e}^{sT} \, \mathrm{d}s \right| \leq b(R) \mathrm{e}^{-\delta T} \tag{3.9}$$

où $b(R) > 0$ ne dépend que de R. En résumé, les estimations (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9) impliquent :

$$|g(0) - g_T(0)| \ll \frac{1}{R} + \frac{c(R)}{T} + d(R)\mathrm{e}^{-\delta T}$$

où $c(R) > 0$ et $d(R) > 0$ ne dépendent que de R. Finalement :

$$\limsup_{T\to\infty} |g(0) - g_T(0)| \ll \frac{1}{R}$$

et comme R peut à présent être rendu arbitrairement grand, la limite supérieure est nulle. □

Théorème 3.10 (Ikehara, 1931). *Soit la série de Dirichlet :*

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \quad \textit{avec} \quad b_n \geq 0.$$

On suppose que :

(a) $G(s)$ *converge absolument pour* $\sigma > 1$,

(b) $G(s)$ *se prolonge en une fonction méromorphe sur le demi-plan* $\sigma \geq 1$, *qui possède uniquement un pôle simple de résidu* r *en* $s = 1$,

(c) $B(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n\leq x} b_n = \mathrm{O}(x)$.

Alors $B(x) \sim rx$ *lorsque* $x \to \infty$.

Démonstration. Afin d'appliquer le théorème 3.1, on transforme d'abord $G(s)$ en une intégrale :

$$G(s) = B(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B(n) - B(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} B(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B(n) \int_n^{n+1} \frac{s}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi, puisque $B(x) = B(n)$ lorsque $n \leq x < n + 1$:

$$\frac{G(s)}{s} = \int_1^{\infty} \frac{B(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

On peut supposer que $r > 0$ sans perte de généralité. Il suffit en effet d'appliquer le théorème d'Ikehara à la série de Dirichlet $G(s) + (1 - r)\zeta(s)$ si $r < 0$. Quitte à diviser a_n par r, on peut également supposer que $r = 1$. Ainsi, pour $\sigma > 1$, d'après (3.11) :

$$\frac{G(s)}{s} - \frac{1}{s-1} = \int_1^{\infty} \frac{B(x) - x}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x$$

c'est-à-dire, pour $\sigma > 0$:

$$g(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{G(s+1)}{s+1} - \frac{1}{s} = \int_1^{\infty} \frac{B(x) - x}{x^{s+2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{B(\mathrm{e}^u) - \mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^u}\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u.$$

On pose alors $f(u) = B(\mathrm{e}^u)\mathrm{e}^{-u} - 1$, localement intégrable et bornée par l'hypothèse (c). De plus, g possède un prolongement analytique au demi-plan $\sigma \geq 0$, puisqu'on a retiré le seul terme d'ordre négatif dans son développement en série de Laurent. Le théorème 3.1 garantit donc l'existence de :

$$g(0) = \int_0^{\infty} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^{\infty} \frac{B(x) - x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Reste à montrer que $B(x) \sim x$ lorsque $x \to \infty$. Supposons par l'absurde que :

$$\ell \overset{\text{def}}{=} \liminf_{x\to\infty} \frac{B(x)}{x} < 1 \quad \text{ou} \quad L \overset{\text{def}}{=} \limsup_{x\to\infty} \frac{B(x)}{x} > 1.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $L > 1$. En effet, on a toujours $\ell \leq L$, et le cas $\ell < 1$ est analogue. En résumé, $B(x) \geq Lx$ pour une infinité de $x \geq 0$. Puisque B est croissante, cela entraîne $B(t) \geq B(x) \geq Lx$ pour tout $t \geq x$, puis :

$$\int_x^{Lx} \frac{B(t) - t}{t^2} \, \mathrm{d}t \geq \int_x^{Lx} \frac{Lx - t}{t^2} \, \mathrm{d}t = \int_1^L \frac{L - v}{v^2} \, \mathrm{d}v = L - 1 - \log L$$

et cette quantité est strictement positive, indépendamment de x. Par conséquent :

$$\limsup_{x \to \infty} \int_x^{Lx} \frac{B(t) - t}{t^2} \, \mathrm{d}t > 0$$

ce qui constitue une contradiction, puisque l'intégrale sur $(0, \infty)$ converge. □

Remarque. L'hypothèse (c) peut en fait se déduire des hypothèses (a) et (b) à l'aide du théorème 3.1 (voir [Kor05] pour une preuve alternative du théorème et de ce résultat).

3.2 Application : Théorème des nombres premiers

Nous présentons une preuve du théorème des nombres premiers faisant usage du théorème de Wiener-Ikehara, tout en conservant l'argument crucial du comportement de $\zeta(s)$ sur la droite $\sigma = 1$.

Définition 3.12. *La* fonction de compte des nombres premiers *est définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :*

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \operatorname{card} \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}.$$

Plutôt que $\pi(x)$, nous utiliserons ici la *seconde fonction de Tchebychev*, définie par :

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Pourquoi ce choix ? C'est le corollaire 2.6 qui va nous permettre d'appliquer le théorème de Wiener-Ikehara, et le théorème des nombres premiers se reformule comme suit à l'aide de $\psi(x)$.

Proposition 3.13. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\psi(x)}{x} = 1,$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\pi(x) \log(x)}{x} = 1.$

Démonstration. Dans la définition de $\psi(x)$, le terme $\log p$ apparaît exactement $\lfloor \log x / \log p \rfloor$ fois pour chaque nombre premier p dont au moins l'une des puissances est inférieure à x. Par conséquent :

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p \leq \log x \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \log x.$$

Il nous faut à présent une minoration. Fixons $x \geq 2$ et considérons $y \in (1, x)$. Alors :

$$\pi(x) = \pi(y) + \sum_{y < p \leq x} 1 \leq \pi(y) + \sum_{y < p \leq x} \frac{\log p}{\log y} \leq y + \frac{\psi(x)}{\log y}$$

puisque $\pi(y) \leq y$. Ceci équivaut donc à :

$$\frac{\pi(x) \log x}{x} - \frac{y \log x}{x} \leq \frac{\psi(x)}{x} \frac{\log x}{\log y}.$$

En prenant $y = x \,/\, \log^2(x)$, il vient :

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} - \frac{1}{\log x} \leq \frac{\psi(x)}{x}\frac{\log x}{\log x - 2\log\log x}$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

Théorème 3.14 (des nombres premiers, Hadamard, De La Vallée Poussin, 1896). *Lorsque $x \to \infty$:*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Démonstration. D'après les propositions 1.2 et 1.4 ainsi que le corollaire 2.6, la série de Dirichlet :

$$D(\Lambda)(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

admet un prolongement méromorphe au demi-plan $\sigma \geq 1$ (notamment puisque $\zeta(s)$ ne s'y annule pas !) dont le résidu en $s = 1$ vaut 1. Le théorème de Wiener-Ikehara permet de conclure. □

Il a été question de la « profondeur » de ce résultat pendant quelques dizaines d'années. Il s'agit en effet d'un énoncé de nature arithmétique, sans lien immédiat avec l'analyse complexe. Une démonstration n'utilisant que des outils « élémentaires » d'arithmétique était donc attendue. C'est en 1949 que Paul Erdös et Atle Selberg donnèrent indépendamment une telle preuve de ce résultat [Erd49; Sel49].

3.3 Application : Moyenne de $\varphi^{-1}(n)$

Voici une seconde application du théorème de Wiener-Ikehara, reliant la fonction zêta et l'indicatrice d'Euler.

Théorème 3.15. *Pour $n \geq 1$, on pose $b_n = \operatorname{card}\{k \geq 1 \mid \varphi(k) = n\}$. Alors :*

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} b_n \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}.$$

Démonstration. Avec les notations du théorème 3.1, observons d'abord que :

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s} = \sum_{\substack{k,n\geq 1\\ \varphi(k)=n}}\frac{1}{n^s} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(k)^s}.$$

De plus, φ est multiplicative et vérifie $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ pour tous $p \in \mathbb{P}$ et $k \geq 1$, donc :

$$\begin{aligned} G(s) = \lim_{r\to\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_r=0}^{\infty}\left(\varphi(p_1^{k_1})\cdots\varphi(p_r^{k_r})\right)^{-s}\right) &= \prod_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\varphi(p^k)^s} \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^{(k-1)s}(p-1)^s}\right) \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1 + \frac{(1-p^{-s})^{-1}}{(p-1)^s}\right). \end{aligned}$$

La proposition 1.3 donne alors :

$$\frac{G(s)}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1 - (p-1)^{-s} + p^{-s}\right)$$

et comme la série $\sum(n-1)^{-s}+n^{-s}$ converge pour $\sigma \geq 1$, cette expression définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\sigma \geq 1$, sauf en $s=1$ où :

$$\lim_{s\to 1}(s-1)G(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1-(p-1)^{-1}+p^{-1}\right).$$

Ce produit converge bien, car la série associée converge absolument. On montre enfin que :

$$\mathrm{Res}(G,1)\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-p^{-2}\right)\left(1-p^{-3}\right) = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-p^{-6}\right).$$

Il suffit alors d'observer que $\mathrm{Res}(G,1) = \zeta(2)\zeta(3)/\zeta(6)$ et d'appliquer le théorème de Wiener-Ikehara. □

3.4 La formule explicite

Le théorème des nombres premiers nous fournit un équivalent de $\pi(x)$, et on peut déjà préciser cette approximation à l'aide du logarithme intégral.

Définition 3.16. *Le* logarithme intégral *est défini, pour $x \in (0,\infty)\setminus\{1\}$, par :*

$$\mathrm{li}(x) = \text{v.p.}\int_0^x \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t\right).$$

On constate que $\mathrm{li}(x)\sim\pi(x)$ lorsque $x\to\infty$, et c'est une approximation de $\pi(x)$ qui se révèle empiriquement plus précise. La meilleure estimation connue à ce jour est :

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{O}\left(x\exp\left(-c(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{1/5}\right)\right)$$

pour une certaine constante $c>0$. En 1901, Helge von Koch (1870–1924) a démontré que, sous l'hypothèse de Riemann, on dispose de l'estimation beaucoup plus forte [Koc01] :

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{O}(\sqrt{x}\log x).$$

Ceci dit, peut-on trouver une formule exacte pour $\pi(x)$? Pour ce faire, il nous faut comme souvent « sortir » de l'arithmétique. Reprenons pour ce faire la fonction ψ définie par (1.9). D'après (1.10) et (1.20), il vient :

$$\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{(s/2)-1}\right)\mathrm{d}x$$

puis, en prenant $s = 1/2+it$:

$$\Xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)x^{-3/4}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right)\mathrm{d}x.$$

En intégrant deux fois par parties, on peut montrer que :

$$\Xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)x^{-1/4}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right)\mathrm{d}x$$

et cette expression est développable en une série entière dont la convergence est suffisamment rapide pour qu'elle se factorise à l'aide de ses zéros, à la manière d'un polynôme (cf. sections 2.1 à 2.8 de [Edw01] pour une démonstration complète). Cependant, le produit doit ici être effectué dans un ordre précis, à savoir :

$$\Xi(t) = \xi(0)\prod_{\rho\in S\cap\mathbb{H}}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\left(1-\frac{s}{1-\rho}\right) \tag{3.17}$$

où S désigne l'ensemble des zéros de $\Xi(t)$, qui sont exactement les zéros non triviaux de $\zeta(s)$! Chaque zéro ρ est regroupé avec $1-\rho$ en raison de la parité de $\Xi(t)$. Bref, on déduit de (1.13) et (3.17) l'égalité :

$$\log\zeta(s) = \frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1) - \log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) + \log\xi(0) + \sum_{\rho}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right) \tag{3.18}$$

où la somme sur ρ doit donc être effectuée au sens suivant (cf. section 1.10 de [Edw01]) :

$$\sum_{\rho\in S\cap\mathbb{H}}\left(\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)+\log\left(1-\frac{s}{1-\rho}\right)\right).$$

Nous allons voir que tout repose sur l'étude de la fonction suivante.

Définition 3.19. *La* fonction de compte de Riemann *est définie, pour $x\in(1,\infty)$, par :*

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\pi(x^{1/n}).$$

Il s'agit en fait d'une somme finie, puisque $x^{1/n}<2$ pour n assez grand. Remarquons que, si $\sigma>1$:

$$\log\zeta(s) = \sum_{k\geq 1}\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{kp^{ks}}.$$

Le terme général de la somme s'écrit comme une intégrale :

$$\frac{1}{p^{ks}} = \int_p^{\infty}\frac{ks}{u^{ks+1}}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\infty}\frac{ks}{u^{ks+1}}\,\mathbb{1}_{p\leq u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\infty}\frac{s}{x^{s+1}}\,\mathbb{1}_{p\leq x^{1/k}}\,\mathrm{d}x$$

où l'on a effectué le changement de variable $x=u^k$, ce qui donne finalement :

$$\frac{\log\zeta(s)}{s} = \int_1^{\infty}J(x)x^{-s-1}\,\mathrm{d}x. \tag{3.20}$$

L'objectif est donc d'inverser (3.20) pour obtenir une expression de $J(x)$ faisant intervenir (3.18). Nous allons d'abord voir comment obtenir $\pi(x)$ à partir de la fonction J. Dans toute la suite, nous adopterons la convention standard suivante, attribuant aux fonctions π et J la valeur moyenne entre leur limite à gauche et leur limite à droite au niveau de leurs points de discontinuité :

$$\pi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\pi(x-\varepsilon)+\pi(x+\varepsilon)}{2} \quad ; \quad J(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(x-\varepsilon)+J(x+\varepsilon)}{2}. \tag{3.21}$$

Proposition 3.22. *Pour tout $x\in(1,\infty)$:*

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}J(x^{1/n}).$$

Démonstration. Il s'agit d'inverser la définition 3.19, comme dans la formule d'inversion de Möbius vue dans la section 2.1. Tant que $x^{1/n}\geq 2$, on retranche au membre de gauche la quantité $\mu(n)/n\times J(x^{1/n})$, le facteur $\mu(n)$ permettant de prendre en compte le nombre de facteurs premiers de n. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
J(x) &= \pi(x)+\frac{1}{2}\pi(x^{1/2})+\frac{1}{3}\pi(x^{1/3})+\frac{1}{4}\pi(x^{1/4})+\frac{1}{5}\pi(x^{1/5})+\cdots,\\
J(x)-\frac{1}{2}J(x^{1/2}) &= \pi(x)+\frac{1}{3}\pi(x^{1/3})+\frac{1}{5}\pi(x^{1/5})+\cdots,\\
J(x)-\frac{1}{2}J(x^{1/2})-\frac{1}{3}J(x^{1/3}) &= \pi(x)+\frac{1}{5}\pi(x^{1/5})-\frac{1}{6}\pi(x^{1/6})+\frac{1}{7}\pi(x^{1/7})+\cdots,\\
J(x)-\frac{1}{2}J(x^{1/2})-\frac{1}{3}J(x^{1/3})+\frac{1}{6}J(x^{1/6}) &= \pi(x)+\frac{1}{5}\pi(x^{1/5})+\frac{1}{7}\pi(x^{1/7})+\cdots,
\end{aligned}$$

de sorte que le membre de droite contienne exactement les $1/k \times \pi(x^{1/k})$, l'entier k ne possédant pas de facteur premier déjà pris en compte dans le membre de gauche. □

Théorème 3.23. *Pour tout $x \in (1, \infty)$:*

$$J(x) = \mathrm{li}(x) - \sum_{\rho \in S \cap \mathbb{H}} \left(\mathrm{li}(x^\rho) - \mathrm{li}(x^{1-\rho})\right) - \log 2 + \int_x^\infty \frac{1}{t(t^2-1)\log t}\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Nous suivons la démarche adoptée dans [Edw01], pp. 25–33. Nous donnerons un sens aux termes $\mathrm{li}(x^\rho)$ en temps voulu. Naïvement, on pourrait d'abord utiliser (3.20) afin d'obtenir, par inversion de Mellin :

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log\zeta(s)}{s} x^s\ \mathrm{d}s \tag{3.24}$$

pour $a \in (1, \infty)$. Même si la fonction J n'est pas continue, l'égalité est tout de même vraie en valeur principale (voir [Edw01], p. 25), entre autres grâce à (3.21). Cependant, les termes du membre de droite de (3.18) ne sont pas intégrables ! Pour y remédier, on intègre alors (3.24) par parties :

$$J(x) = -\frac{1}{2\pi i \log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\log\zeta(s)}{s}\right) x^s\ \mathrm{d}s$$

et (3.18) se dérive en :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\log\zeta(s)}{s}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s}\log(s-1)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) + \frac{\log\xi(0)}{s^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sum_\rho \frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right).$$

Observons avant de poursuivre que (0.1) entraîne :

$$-\frac{1}{s}\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{N}\log\left(1+\frac{s}{2k}\right) + \frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s+1}{2N}\right) - \frac{1}{2}\log N\right)$$

et que $\log N$ peut s'écrire comme une somme téléscopique :

$$\log N = \sum_{n=1}^{N-1}(\log(n+1) - \log(n)) = \sum_{n=1}^{N-1}\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Par conséquent, en éliminant deux termes négligeables, il vient :

$$-\frac{1}{s}\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \tag{3.25}$$

et cette série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$, ce qui nous permet de la dériver terme à terme. En résumé, (3.18) et (3.25) donnent :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\log\zeta(s)}{s}\right) = \frac{\log\xi(0)}{s^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s}\log(s-1)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sum_\rho\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)\right) \tag{3.26}$$

et nous allons devoir intégrer chacun de ces termes contre x^s. Pour le premier, par définition :

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{s^2}\ \mathrm{d}s = ix^a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{it\log x}}{(a+it)^2}\ \mathrm{d}t.$$

Cette intégrale peut se calculer avec le théorème des résidus. En considérant un contour parcourant le segment $[-r, r]$ pour $r \in (0, \infty)$, puis reliant ses extrémités en décrivant un demi-cercle, il vient, en faisant $r \to \infty$:

$$\frac{1}{2\pi i\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{s^2}\ \mathrm{d}s = 1 \tag{3.27}$$

et puisque $\log \xi(0) = \log(-\zeta(0)) = -\log 2$ (cf. proposition 1.14) :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i \log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log \xi(0)}{s^2} x^s \, \mathrm{d}s = -\log 2.} \tag{3.28}$$

En vue d'étudier les termes logarithmiques, considérons $\beta \in \mathbb{C}$ et définissons, pour $\mathrm{Re}(\beta) > 0$:

$$h(\beta) = \frac{1}{2\pi i \log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(\frac{1}{s} \log \left(\frac{s}{\beta} - 1 \right) \right) x^s \, \mathrm{d}s.$$

Cette intégrale converge absolument. En effet, $|x^s| = x^a$ ne dépend pas de la partie imaginaire de s, et :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(\frac{1}{s} \log \left(\frac{s}{\beta} - 1 \right) \right) = \frac{1}{s(s-\beta)} - \frac{1}{s^2} \log \left(\frac{s}{\beta} - 1 \right) \ll \frac{1}{s^{3/2}}.$$

On peut maintenant dériver sous l'intégrale, puis appliquer le théorème de Schwarz ($\partial_\beta \partial_s = \partial_s \partial_\beta$) et intégrer par parties :

$$h'(\beta) = \frac{1}{2\pi i \beta} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{s-\beta} \, \mathrm{d}s.$$

Pour calculer cette intégrale, observons que si $a > \mathrm{Re}(\beta)$, alors pour tout $v \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{a+iv-\beta} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-itv} \mathrm{e}^{t(\beta-a)} \, \mathrm{d}t$$

donc par inversion de Fourier, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{itv}}{a+iv-\beta} \, \mathrm{d}v = 2\pi \mathrm{e}^{t(\beta-a)} \, \mathbb{1}_{\{t>0\}}$$

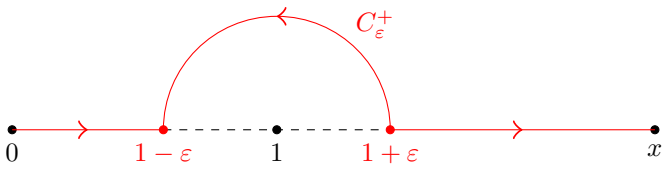
et puisque $\log x > 0$:

$$h'(\beta) = \frac{1}{2\pi i \beta} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{s-\beta} \, \mathrm{d}s = \frac{x^a}{2\pi\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{it \log x}}{a+it-\beta} \, \mathrm{d}t = \frac{x^a}{\beta} \mathrm{e}^{\log x(\beta-a)} = \frac{x^\beta}{\beta}.$$

Fixons à présent $\varepsilon > 0$ et considérons l'intégrale :

$$g(\beta) = \int_{C_\varepsilon^+} \frac{z^{\beta-1}}{\log z} \, \mathrm{d}z$$

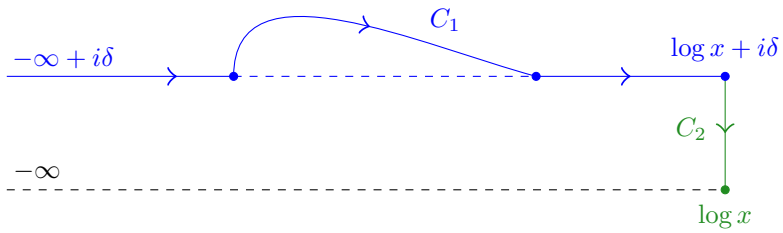
où le contour C_ε^+ est défini comme suit.



En dérivant sous l'intégrale, on obtient :

$$g'(\beta) = \int_{C_\varepsilon^+} z^{\beta-1} \, \mathrm{d}z = \int_0^x t^{\beta-1} \, \mathrm{d}t = \frac{x^\beta}{\beta}$$

puisqu'il n'y a plus de singularité en $z = 1$, donc l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$ (à condition qu'il reste dans le demi-plan $\mathrm{Re}(\beta) > 0$). On constate alors que $g'(\beta) = h'(\beta)$, donc comme g et h sont analytiques, $g(\beta) = h(\beta) + c_x$ où c_x dépend éventuellement de x, mais pas de β. Pour la déterminer, on peut par exemple calculer les limites de $g(\beta)$ et $h(\beta)$ lorsque $\mathrm{Im}(\beta) \to +\infty$, tandis que $\mathrm{Re}(\beta)$ reste fixe. En ajoutant $i\delta$ au contour C_ε^+ pour $\delta > 0$, puis en posant $z = \mathrm{e}^u$, le contour d'intégration devient le suivant.



sachant qu'il n'y a plus de singularité sur le segment en pointillés bleus, donc on peut y déplacer la partie incurvée du contour si nécessaire. Ainsi :

$$\begin{aligned} g(\beta) &= \int_{C_1} \frac{\mathrm{e}^{\beta u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{C_2} \frac{\mathrm{e}^{\beta u}}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{\log x} \frac{\mathrm{e}^{\beta(t+i\delta)}}{t+i\delta}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\delta} \frac{\mathrm{e}^{\beta(\log x+it)}}{\log x+it}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{(i\,\mathrm{Re}(\beta)-\mathrm{Im}(\beta))\delta} \int_{-\infty}^{\log x} \frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{Re}(\beta)+it)v}}{v+i\delta}\,\mathrm{d}v - i\mathrm{e}^{\beta\log x}\int_0^{\delta} \frac{\mathrm{e}^{(i\,\mathrm{Re}(\beta)-\mathrm{Im}(\beta))v}}{\log x+iv}\,\mathrm{d}v \xrightarrow[\mathrm{Im}(\beta)\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Pour déterminer la limite de $h(\beta)$, on considère la fonction :

$$\widetilde{h}(\beta) = \frac{1}{2\pi i\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)x^s\,\mathrm{d}s.$$

Lorsque $|s|\geq|\beta|$, la définition de $\log(1-s/\beta)$ est ambigüe. Pour $\beta\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$, on pose alors :

$$\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right) \overset{\text{def}}{=} \log(s-\beta)-\log(-\beta).$$

Cette définition entraîne $\log(-\beta)-\log(\beta) = -\pi i$, d'où :

$$\begin{aligned} h(\beta)-\widetilde{h}(\beta) &= \frac{1}{2\pi i\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s}\log\left(\frac{s}{\beta}-1\right)-\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{\beta}{s}\right)\right)x^s\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi i\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s}(\log(-\beta)-\log(\beta))\right)x^s\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^s}{s^2}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

donc d'après (3.27), il vient :

$$h(\beta)-\widetilde{h}(\beta) = \pi i.$$

Par convergence dominée, on montre également que $\widetilde{h}(\beta)\to 0$ lorsque $\mathrm{Im}(\beta)\to+\infty$ à partie réelle fixée, ce qui entraîne $c_x = \pi i$. Enfin, lorsque $\varepsilon\to 0$:

$$\int_{\mathbb{H}\cap C_\varepsilon^+}\frac{1}{\log z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi}\frac{i\varepsilon\mathrm{e}^{i\theta}}{\log(1+\varepsilon\mathrm{e}^{i\theta})}\,\mathrm{d}\theta = \pi i + \mathrm{O}(\varepsilon)$$

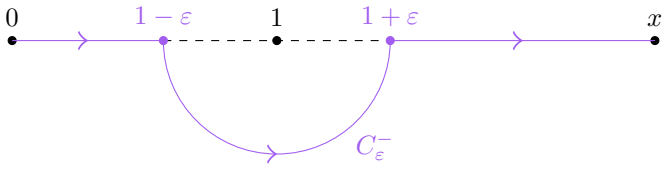
donc $h(1) = \mathrm{li}(x)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s}\log(s-1)\right)x^s\,\mathrm{d}s = \mathrm{li}(x).} \tag{3.29}$$

L'étude du terme suivant nécessite un prolongement du logarithme intégral. Il est en effet licite de permuter la somme sur les zéros non triviaux et l'intégrale (voir [Edw01], p. 38), de sorte que :

$$\frac{1}{2\pi i \log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s}\sum_{\rho}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\right)x^s\,\mathrm{d}s=-\sum_{\rho}\widetilde{h}(\rho)$$

et nous avons vu que $g(\beta)=\widetilde{h}(\beta)$ lorsque $\mathrm{Re}(\beta)>0$ et $\mathrm{Im}(\beta)>0$. Cette égalité reste vraie quand $\mathrm{Re}(\beta)>0$ et $\mathrm{Im}(\beta)<0$, à ceci près qu'il faut changer le contour d'intégration en C_ε^- comme ci-dessous.



Lorsque $\beta\in(0,\infty)$, on a donc :

$$\int_{C_\varepsilon^\pm}\frac{z^{\beta-1}}{\log z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{li}(x^\beta)\mp\pi i$$

et cette formule fournit un prolongement analytique de $\mathrm{li}(x^\beta)$ dans les domaines mentionnés. Enfin, on peut vérifier que si $\mathrm{Re}(\beta)<0$, alors[1] :

$$\widetilde{h}(\beta)=-\int_t^\infty\frac{u^{\beta-1}}{\log u}\,\mathrm{d}u \tag{3.30}$$

prolonge $\widetilde{h}$ de manière analytique. En effet, les deux expressions ont la même dérivée et la limite de (3.30) est nulle lorsque $\beta\to-\infty$. En résumé, la somme sur les zéros non triviaux s'écrit :

$$\sum_{\rho}\widetilde{h}(\rho)=\sum_{\rho\in S\cap\mathbb{H}}\left(\int_{C_\varepsilon^+}\frac{z^{\rho-1}}{\log z}\,\mathrm{d}z+\int_{C_\varepsilon^-}\frac{z^{-\rho}}{\log z}\,\mathrm{d}z\right)$$

soit finalement :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i \log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s}\sum_{\rho}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\right)x^s\,\mathrm{d}s=\sum_{\rho\in S\cap\mathbb{H}}\left(\mathrm{li}(x^\rho)+\mathrm{li}(x^{1-\rho})\right).} \tag{3.31}$$

L'interversion somme/intégrale est également valide pour la dernière somme (voir [Edw01], p. 32), et elle donne :

$$\frac{1}{2\pi i \log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)\right)x^s\,\mathrm{d}s=-\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{h}(-2n)=\int_x^\infty\frac{1}{\log t}\sum_{n=1}^{\infty}t^{-2n-1}\,\mathrm{d}t$$

ce qui correspond exactement à :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i \log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)\right)x^s\,\mathrm{d}s=\int_x^\infty\frac{1}{t(t^2-1)\log t}\,\mathrm{d}t.} \tag{3.32}$$

Le résultat final se déduit alors de (3.26), (3.28), (3.29), (3.31) et (3.32). □

Hans von Mangoldt (1854–1925) fut le premier à prouver rigoureusement ce résultat en 1895, en démontrant d'abord l'égalité suivante, faisant intervenir la fonction ψ de Tchebychev [Man95] :

$$\psi(x)=x-\sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho}-\log(2\pi)-\frac{1}{2}\log\left(1-x^{-2}\right)$$

[1] C'est suffisant pour notre étude, puisqu'il y a pas de zéro non trivial de partie réelle nulle !

avec la même convention que précédemment sur les discontinuités de ψ. Remarquons enfin qu'en combinant la proposition 3.22 et le théorème 3.23, on obtient :

$$\pi(x) = \mathrm{R}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{R}(x^{\rho}) + \dots \quad \text{avec} \quad \mathrm{R}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \operatorname{li}(x^{1/n}).$$

4 Caractères et fonctions L de Dirichlet

Le lien entre les nombres premiers et les séries de Dirichlet n'est plus à prouver. Nous nous intéresserons dans cette section à un cas particulier de série de Dirichlet :

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

où χ est un certain morphisme de groupes. Nous montrerons aussi le théorème de la progression arithmétique, qui stipule que pour tous entiers a et q premiers entre eux, l'ensemble :

$$\mathbb{P}_{a,q} = \{p \in \mathbb{P} \mid p \equiv a \pmod{q}\}$$

est infini. Nous expliciterons sa *densité analytique*, c'est-à-dire l'unique $d \in (0,1]$ tel que :

$$\sum_{p \in \mathbb{P}_{a,q}} \frac{1}{p^s} \underset{s \downarrow 1}{\sim} d \log\left(\frac{1}{s-1}\right).$$

Cette définition est motivée par la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Il existe une infinité de nombres premiers. Plus précisément, lorsque $s \downarrow 1$:*

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} \sim \log\left(\frac{1}{s-1}\right).$$

Démonstration. Considérons $s \in (1, \infty)$. Puisque $\zeta(s) > 0$, les propositions 1.2 et 1.3 donnent :

$$-\sum_{p \in \mathbb{P}} \log\left(1 - p^{-s}\right) = \log\left(\frac{1}{s-1} + \psi(s)\right).$$

On développe maintenant le logarithme en série entière :

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k p^{ks}} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k p^{ks}} = \log\left(\frac{1}{s-1} + \psi(s)\right).$$

Puisque ψ est holomorphe sur le demi-plan $\sigma > 0$, elle est en particulier bornée au voisinage de $s = 1$, donc le terme $\psi(s)$ dans le logarithme est négligeable. Par ailleurs :

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k p^{ks}} \leq \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{2s} - p^s} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

et ceci uniformément en s, d'où le résultat. □

4.1 Caractères sur un groupe fini

Définition 4.2. *Soit G un groupe fini. Un* caractère *de G est un morphisme de groupes $G \to \mathbb{C}^*$.*

On note traditionnellement $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G, appelé *groupe dual* de G. Ce dernier peut être naturellement muni d'une structure de groupe, héritée de celle de G :

$$\chi \cdot \chi' : x \longmapsto \chi(x)\chi'(x).$$

Le neutre pour cette loi est le caractère trivial $\chi_0 = 1$. Dans cette section, nous étudierons le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ pour un entier $q \geq 2$, dont le dual sera noté $\mathfrak{C}_q$. Ses éléments sont appelés *caractères de Dirichlet modulo q*.

Proposition 4.3. *Tout groupe abélien fini est isomorphe à son dual.*

Démonstration. D'après le théorème de structure des groupes abéliens de type fini, il suffit de traiter le cas des groupes cycliques. Considérons donc un groupe cyclique G d'ordre n engendré par $x \in G$, ainsi qu'une racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité ω. Il existe alors un unique $\chi \in \widehat{G}$ tel que $\chi(x) = \omega$. Le groupe $\widehat{G}$ est donc cyclique d'ordre n, engendré par χ. □

Proposition 4.4. *Si $a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, alors :*

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{C}_q} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{si } a = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Si $a = 1$, c'est évident. Sinon, il existe un caractère χ' tel que $\chi'(a) \neq 1$, de sorte que :

$$\chi'(a) \sum_{\chi \in \mathfrak{C}_q} \chi(a) = \sum_{\chi \in \mathfrak{C}_q} \chi\chi'(a) = \sum_{\chi \in \mathfrak{C}_q} \chi(a)$$

puisque $\chi \longmapsto \chi\chi'$ est une permutation de $\mathfrak{C}_q$. Par conséquent :

$$(\chi'(a) - 1) \sum_{\chi \in \mathfrak{C}_q} \chi(a) = 0$$

et on avait supposé que $\chi'(a) - 1 \neq 0$, d'où le résultat. □

Proposition 4.5. *Si $\chi \in \mathfrak{C}_q$, alors :*

$$\sum_{a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{si } \chi = \chi_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Immédiat avec la proposition 4.4 et l'isomorphisme donné par la proposition 4.3.

Proposition 4.6. *Si $a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ est d'ordre n, alors :*

(i) *pour tout $\chi \in \mathfrak{C}_q$, $\chi(a)$ est une racine $n^{ème}$ de l'unité ;*

(ii) *chaque racine $n^{ème}$ de l'unité apparaît exactement $\dfrac{\varphi(q)}{n}$ fois parmi les $\chi(a)$.*

Démonstration. L'assertion (i) découle immédiatement du théorème de Lagrange :

$$\chi(a)^n = \chi(a^n) = \chi(1) = 1.$$

Pour le point (ii), considérons une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité ρ, et notons m le nombre d'occurrences de ρ parmi les complexes de la forme $\chi(a)$, c'est-à-dire :

$$m = \operatorname{card}\{\chi \in \mathfrak{C}_q \mid \chi(a) = \rho\}.$$

Considérons alors la somme double :

$$S = \sum_{\chi \in \mathfrak{C}_q} \sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(a^k)}{\rho^k} = \sum_{\chi \in \mathfrak{C}_q} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\chi(a)}{\rho}\right)^k.$$

Si $\chi(a) = \rho$, il est clair que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(a^k)}{\rho^k} = n$$

et dans le cas contraire, $\chi(a)/\rho$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité différente de 1. Par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(a^k)}{\rho^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\chi(a)}{\rho}\right)^k = 0$$

d'où $S = mn$. Les deux sommes étant finies, on peut les permuter :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\rho^k} \sum_{\chi \in \mathfrak{C}_q} \chi(a^k).$$

Puisque a et ρ sont d'ordre n et que $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ est d'ordre $\varphi(q)$, on en déduit $mn = \varphi(q)$. □

4.2 Séries L de Dirichlet

Pour définir la série de Dirichlet associée à un caractère, il nous faut au préalable étendre sa définition aux entiers naturels. Si $\chi \in \mathfrak{C}_q$, on pose alors :

$$\chi(k) = \begin{cases} \chi(\bar{k}) & \text{si } \operatorname{pgcd}(k,q) = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\bar{k}$ désigne la classe de $k \in \mathbb{N}$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$.

Définition 4.7. *Si $\chi \in \mathfrak{C}_q$, sa* série L de Dirichlet *est définie par :*

$$L(s,\chi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s}.$$

Comme $|\chi(k)| \leq 1$, on sait que $L(s,\chi)$ est bien définie pour $\sigma > 1$. Nous allons voir que le comportement des fonctions $L(s,\chi)$ près de $s = 1$ diffère toutefois de celui de $\zeta(s)$.

Proposition 4.8. *Si $\chi \in \mathfrak{C}_q$ et $\sigma > 1$, alors :*

$$L(s,\chi) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}.$$

Démonstration. Même démarche que dans la proposition 1.3, en utilisant la multiplicativité de χ. □

Proposition 4.9. *La fonction $L(s,\chi_0)$ a un pôle simple en $s = 1$.*

Démonstration. Supposons $\sigma > 1$. Pour $p \in \mathbb{P}$:

$$\chi_0(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \nmid q, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que, d'après la proposition 4.8 :

$$L(s,\chi_0) = \prod_{p \nmid q} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \zeta(s) \prod_{p \mid q} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Comme le produit sur les nombres premiers divisant q est fini, la proposition 1.2 donne le résultat. □

Lemme 4.10. *Soit $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite de nombres complexes. Pour $N \geq 1$ entier, on note :*

$$S(N) = \sum_{k=1}^{N} a_k.$$

On suppose qu'il existe deux réels $M \geq 0$ et $r > 0$ tels que, pour tout entier $N \geq 1$:

$$\left|\frac{S(N)}{N^r}\right| \leq M.$$

Alors la série $\sum a_k k^{-s}$ converge pour $\sigma > r$.

Démonstration. Montrons que S est une suite de Cauchy. Considérons pour ce faire $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Une transformation d'Abel donne tout d'abord :

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{k^s} = \frac{S(n)}{n^s} - \frac{S(m-1)}{m^s} + \sum_{k=m}^{n-1} S(k)\left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right)$$

et nous avons vu déjà plusieurs fois que :

$$\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} = \int_k^{k+1} \frac{s}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{k^s}\right| &\leq \frac{M}{n^{\sigma-r}} + \frac{M}{(m-1)^{\sigma-r}} + \sigma \sum_{k=m}^{n-1} |S(k)| \int_k^{k+1} \frac{1}{x^{\sigma+1}}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{2M}{(m-1)^{\sigma-r}} + \sigma M \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^{\sigma-r+1}}\end{aligned}$$

et comme $\sigma - r > 0$, on obtient le résultat souhaité. □

Proposition 4.11. *Si $\chi \in \mathfrak{C}_q$ n'est pas trivial, alors la série $L(s,\chi)$ converge pour $\sigma > 0$.*

Démonstration. Puisque χ n'est pas trivial, d'après la proposition 4.5, pour tout entier $N \geq 1$:

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \chi(k)\right| \leq \varphi(q)$$

et le lemme 4.10 assure la convergence de la série pour $\sigma > 0$. □

4.3 Non-annulation de $L(1,\chi)$

Proposition 4.12. *Si $\chi \in \mathfrak{C}_q$ n'est pas trivial, alors $L(1,\chi) \neq 0$.*

Démonstration. Pour $p \in \mathbb{P}$ inversible modulo q, notons $f(p)$ l'ordre de $\bar{p}$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, ainsi que :

$$g(p) = \frac{\varphi(q)}{f(p)}.$$

Définissons également la fonction :

$$\zeta_{\omega_q}(s) = \prod_{\chi \in \mathfrak{C}_q} L(s,\chi) = \prod_{\chi \in \mathfrak{C}_q} \prod_{p \nmid q} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}.$$

Cette expression peut être simplifiée comme suit. Comme p ne divise pas q :

$$\prod_{\chi\in\mathfrak{C}_q}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)=\prod_{k=0}^{f(p)-1}\prod_{\chi(p)=\omega^k}\left(1-\frac{\omega^k}{p^s}\right)=\prod_{k=0}^{f(p)-1}\left(1-\frac{\omega^k}{p^s}\right)^{g(p)}=p^{-f(p)s}B(p^s)$$

où B est le polynôme :

$$B=\prod_{k=0}^{f(p)-1}\left(X-\omega^k\right)=X^{f(p)-1}-1.$$

Ceci entraîne donc :

$$\zeta_{\omega_q}(s)=\prod_{p\nmid q}\left(1-p^{-f(p)s}\right)^{-g(p)}.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe un caractère χ non trivial tel que $L(1,\chi)=0$. Couplée aux propositions 4.9 et 4.11, l'égalité :

$$\zeta_{\omega_q}(s)=L(s,\chi_0)\prod_{\chi\neq\chi_0}L(s,\chi)$$

nous montre que ζ_{ω_q} est bien définie pour $\sigma>0$. Pour $s\in(0,\infty)$, on a alors :

$$\left(1-p^{-f(p)s}\right)^{-g(p)}=\left(\sum_{j=0}^{\infty}p^{-f(p)sj}\right)^{g(p)}\geq\sum_{j=0}^{\infty}p^{-\varphi(q)sj}=\left(1-p^{-\varphi(q)s}\right)^{-1}$$

puisque les termes de la somme sont positifs, et que $f(p)g(p)=\varphi(q)$. Finalement :

$$\zeta_{\omega_q}(s)\geq\prod_{p\nmid q}\left(1-p^{-\varphi(q)s}\right)^{-1}$$

et cela contredit l'existence de $\zeta_{\omega_q}(s)$ pour $s=1/\varphi(q)>0$. □

4.4 Théorème de la progression arithmétique

Nous avons désormais presque tous les ingrédients nécessaires à la démonstration du théorème de Dirichlet.

Proposition 4.13. *Si $\chi\in\mathfrak{C}_q$ n'est pas trivial, alors la fonction :*

$$d_\chi(s)=\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\chi(p)}{p^s}=\sum_{p\nmid q}\frac{\chi(p)}{p^s}$$

reste bornée lorsque $s\downarrow 1$.

Démonstration. Observons que pour $p\in\mathbb{P}$ et $\sigma>1$:

$$\left|\frac{\chi(p)}{p^s}\right|\leq\frac{1}{p^\sigma}<1$$

ce qui nous autorise à passer au logarithme dans la proposition 4.8, et à développer ce dernier en série entière autour de $s=1$:

$$\log L(s,\chi)=-\sum_{p\in\mathbb{P}}\log\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)=d_\chi(s)+\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k\geq 2}\frac{\chi(p^k)}{kp^{ks}}.$$

La proposition 4.12 assure que $\log L(s,\chi)$ reste borné lorsque $s\downarrow 1$. Par ailleurs, si $\sigma>1$:

$$\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k\geq 2}\left|\frac{\chi(p^k)}{kp^{ks}}\right|\leq\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k\geq 2}\frac{1}{p^{k\sigma}}=\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{p^{-2\sigma}}{1-p^{-\sigma}}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}<\infty$$

et ceci uniformément en σ, ce qui permet de conclure. □

Théorème 4.14 (de la progression arithmétique, Dirichlet, 1838). *Soient a et q deux entiers premiers entre eux. Alors, lorsque $s \downarrow 1$:*

$$\sum_{p\in\mathbb{P}_{a,q}} \frac{1}{p^s} \sim \frac{1}{\varphi(q)} \log\left(\frac{1}{s-1}\right).$$

En particulier, l'ensemble $\mathbb{P}_{a,q}$ est infini.

Démonstration. Montrons tout d'abord l'égalité :

$$\sum_{p\in\mathbb{P}_{a,q}} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi\in\mathfrak{C}_q} d_\chi(s)\chi(a^{-1}). \tag{4.15}$$

Pour ce faire, observons d'abord que :

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_q} d_\chi(s)\chi(a^{-1}) = \sum_{\chi\in\mathfrak{C}_q} \sum_{p\nmid q} \frac{\chi(pa^{-1})}{p^s}.$$

Il s'agit d'une somme finie de séries absolument convergentes, ce qui nous autorise à les permuter :

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_q} \sum_{p\nmid q} \frac{\chi(pa^{-1})}{p^s} = \sum_{p\nmid q} \frac{1}{p^s} \sum_{\chi\in\mathfrak{C}_q} \chi(pa^{-1}).$$

D'après la proposition 4.4, si $p \in \mathbb{P}$:

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_q} \chi(pa^{-1}) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{si } p \in \mathbb{P}_{a,q}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui donne bien (4.15). Enfin :

$$\sum_{p\in\mathbb{P}_{a,q}} \frac{1}{p^s} = \frac{d_{\chi_0}(s)}{\varphi(q)} + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi\neq\chi_0} d_\chi(s)\chi(a^{-1}).$$

Les propositions 4.1, 4.9 et 4.13 permettent alors de conclure. □

4.5 L'équation fonctionnelle des fonctions L

Définition 4.16. *Soit $\chi \in \mathfrak{C}_q$. On dit que χ est* primitif *lorsqu'il n'existe aucun $\chi' \in \mathfrak{C}_m$ pour un certain entier $m < q$, tel que $\chi(k) = \chi'(k)$ pour tout entier k premier avec q.*

Intuitivement, χ est primitif lorsque ce n'est pas un prolongement d'un caractère de Dirichlet modulo un entier plus petit que q. En particulier, le caractère trivial est primitif si, et seulement si, $q = 1$.

Définition 4.17. *Soit $\chi \in \mathfrak{C}_q$. La* somme de Gauss relative à χ *est définie, pour $\ell \in \mathbb{Z}$, par :*

$$G(\ell,\chi) = \sum_{n=1}^{q} \chi(n)\, \mathrm{e}\left(\frac{n\ell}{q}\right)$$

où l'on a posé $\mathrm{e}(x) = \exp(2\pi i x)$.

Proposition 4.18. *Soit $\chi \in \mathfrak{C}_q$. Si χ est primitif, alors pour tout entier $k \geq 1$:*

$$G(k,\chi) = \overline{\chi(k)} G(1,\chi).$$

Démonstration. Détaillée dans [Ten], pp. 365–366. □

Proposition 4.19. *Soit $\chi \in \mathfrak{C}_q$. Si χ est primitif, alors la fonction $L(s,\chi)$ se prolonge en une fonction entière (resp. méromorphe avec un pôle simple de résidu 1 en $s=1$) lorsque $\chi \neq \chi_0$ (resp. $\chi = \chi_0$), et satisfait l'équation fonctionnelle :*

$$L(s,\chi) = \frac{G(1,\chi)}{i^\alpha}\frac{2^s\pi^{s-1}}{q^s}\sin\Big(\frac{\pi}{2}(s+\alpha)\Big)\Gamma(1-s)L(1-s,\overline{\chi})$$

où l'on a posé :

$$\alpha = \alpha(\chi) = \frac{1-\chi(-1)}{2}.$$

Démonstration. Nous présentons la méthode du *contour de Hankel*. Considérons l'intégrale :

$$I(s,\chi) = \int_{C_v} W(z,\chi)z^{s-1}\,\mathrm{d}z \quad \text{avec} \quad W(z,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\mathrm{e}^{-nz}$$

où $0 < v < 2\pi/q$, le logarithme complexe étant défini en coupant la demi-droite des réels positifs, et le contour de Hankel $C_v = C_{1,v} \cup C_{2,v} \cup C_{3,v}$ étant défini comme suit[2] :

- $C_{1,v}$ est la demi-droite (v,∞) parcourue en partant de $+\infty$,
- $C_{2,v}$ est le cercle de centre 0 et de rayon v, dont l'argument des points croît de 0 à 2π,
- $C_{3,v}$ est la demi-droite (v,∞) parcourue en partant de v.

Il est clair que $I(s,\chi)$ est une fonction entière de s, et on montre sans peine que pour $t \in \mathbb{R}$:

$$W(t,\chi) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-qt}}\sum_{n=1}^{q}\chi(n)\mathrm{e}^{-nt}. \tag{4.20}$$

Supposons d'abord $\sigma > 1$. Par définition de $I(s,\chi)$:

$$I(s,\chi) = \int_v^\infty W(t,\chi)t^{s-1}\,\mathrm{d}t + \int_{C_{2,v}} W(z,\chi)z^{s-1}\,\mathrm{d}z + \mathrm{e}^{2\pi i s}\int_v^\infty W(t,\chi)t^{s-1}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $|v| < 2\pi$, $W(z,\chi)$ est holomorphe sur $C_{2,v}$ donc en particulier bornée sur ce domaine. Ainsi :

$$\int_{C_{2,v}} W(z,\chi)z^{s-1}\,\mathrm{d}z = \mathrm{O}\left(v^{\sigma-1}\right).$$

En faisant tendre v vers 0, on en déduit :

$$\begin{aligned} I(s,\chi) &= \left(\mathrm{e}^{2\pi i s}-1\right)\int_0^\infty W(t,\chi)t^{s-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\mathrm{e}^{2\pi i s}-1\right)\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\mathrm{e}^{2\pi i s}-1\right)\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} \\ &= 2i\mathrm{e}^{\pi i s}\sin(\pi s)\Gamma(s)L(s,\chi). \end{aligned}$$

[2] En toute rigueur, on ne peut pas intégrer sur un domaine qui rencontrerait la demi-droite coupée ! C'est donc un passage à la limite implicite qui est fait ici, et qui explique le terme $\mathrm{e}^{2\pi i s}$. En effet, l'égalité $(a^b)^c = a^{bc}$ n'est plus tout à fait vraie dans $\mathbb{C}$...

La formule des compléments donne alors :

$$L(s,\chi) = \frac{\mathrm{e}^{-\pi i s}}{2\pi i}\Gamma(1-s)I(s,\chi). \tag{4.21}$$

Deux cas se présentent ici :

- si $\chi \neq \chi_0$, alors $L(s,\chi)$ se prolonge en une fonction entière d'après la proposition 4.11 ;
- si $\chi = \chi_0$, alors $q = 1$ puisque χ est également primitif, donc la proposition 4.9 implique :

$$L(s,\chi_0) = \prod_{p\mid q}\left(1-p^{-s}\right)\zeta(s) \underset{s\to 1}{\sim} \frac{\varphi(q)}{q}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s-1}.$$

Supposons à présent $\sigma < 0$, et notons $v_k = (2k+1)\pi/q$ pour $k \in \mathbb{N}$. Le contour $C_{v_k} \setminus C_v$ est un lacet simple parcouru dans le sens trigonométrique, qui entoure les pôles de $h(z) = W(z,\chi)z^{s-1}$ que sont les :

$$z_\ell = \frac{2\pi i \ell}{q}$$

lorsque $1 \leq |\ell| \leq k$. D'après le théorème des résidus :

$$\int_{C_{v_k}} h(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_v} h(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{1\leq|\ell|\leq k} \mathrm{Res}(h, z_\ell).$$

Le résidu se calcule à l'aide de (4.20) :

$$\mathrm{Res}(h,z_\ell) = \lim_{z\to z_\ell}(z-z_\ell)\,W(z,\chi)z^{s-1} = \frac{z_\ell^{s-1}}{q}\sum_{n=1}^{q}\chi(n)\,\mathrm{e}\left(-\frac{n\ell}{q}\right)$$

ce qui nous donne donc :

$$\begin{aligned}
I(s,\chi) - \int_{C_{v_k}} h(z)\,\mathrm{d}z &= -z_1^s \sum_{1\leq|\ell|\leq k} \ell^{s-1}\sum_{n=1}^{q}\chi(n)\,\mathrm{e}\left(-\frac{n\ell}{q}\right) \\
&= -z_1^s \sum_{1\leq|\ell|\leq k} (-1)^{s-1}\ell^{s-1}G(\ell,\chi) \\
&= z_1^s \mathrm{e}^{\pi s i} \sum_{1\leq|\ell|\leq k} \ell^{s-1}G(\ell,\chi) \\
&= z_1^s(\mathrm{e}^{\pi s i} - \chi(-1)) \sum_{1\leq\ell\leq k} \ell^{s-1}G(\ell,\chi).
\end{aligned}$$

Observons maintenant que $\chi(-1) = 1 - 2\alpha(\chi) = \mathrm{e}^{-\pi i\alpha}$, car :

$$\alpha(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi(-1) = -1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et comme $\sigma < 0$, on peut faire tendre k vers l'infini :

$$I(s,\chi) = z_1^s(\mathrm{e}^{\pi i s} - \mathrm{e}^{\pi i\alpha})\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell^{s-1}G(\ell,\chi).$$

Enfin, la proposition 4.18 entraîne :

$$I(s,\chi) = z_1^s(\mathrm{e}^{\pi i s} - \mathrm{e}^{\pi i\alpha})G(1,\chi)L(1-s,\overline{\chi})$$

et (4.21) fournit un prolongement analytique pour $L(s,\chi)$ et donne l'équation fonctionnelle souhaitée. □

Considérons par exemple le caractère χ_4 défini sur $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$ par $\chi(-1) = -1$. La série L associée est :

$$L(s,\chi_4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

et se prolonge en une fonction entière. Puisque $\alpha(\chi_4) = 1$, $G(1,\chi_4) = 2i$, et $\overline{\chi_4} = \chi_4$:

$$L(s,\chi_4) = 2^{1-s}\pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}(s+1)\right) \Gamma(1-s) L(1-s,\chi_4)$$

ce qui peut se réécrire, à l'aide de la formule des compléments et de l'égalité (1.12) :

$$L(s,\chi_4) = 2^{1-2s}\pi^{s-1/2} \frac{\Gamma\left(\dfrac{2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{s+1}{2}\right)} L(1-s,\chi_4). \tag{4.22}$$

5 La quête des exposants

Nous allons à présent illustrer toute la puissance des méthodes analytiques dans l'étude des fonctions dites *arithmétiques* (cf. section 2.1). Si a est une telle fonction dont les variations paraissent assez anarchiques, il peut être intéressant de s'intéresser à sa *fonction sommatoire* :

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n).$$

Les estimations asymptotiques de $A(x)$ prennent en général la forme suivante :

$$A(x) = \text{partie principale} + \mathrm{O}(x^{\alpha})$$

et l'objectif est alors d'optimiser l'exposant α, ce qui s'avère souvent extrêmement complexe. Néanmoins, les équations fonctionnelles de $\zeta(s)$ et des fonctions $L(s, \chi)$ contiennent des informations importantes sur certaines fonctions arithmétiques. Voici un premier théorème permettant de relier celles-ci et celles-là.

Théorème 5.1. *Soit a une fonction arithmétique. Pour $\sigma > 1$, on pose :*

$$L(s, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

et on suppose que $L(s, a)$ possède un prolongement analytique au plan complexe, sauf éventuellement avec un pôle en $s = 1$, satisfaisant l'équation fonctionnelle :

$$\gamma(s)L(s, a) = \gamma(1 - s)L(1 - s, a) \quad \textit{avec} \quad \gamma(s) = w^s \Gamma(a_1 s) \cdots \Gamma(a_r s)$$

étant donnés $w > 0$ et $a_1, \ldots, a_r > 0$. Alors, pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)f(n) = f(0)L(0, a) + \operatorname{Res}\left(\mathfrak{M}f(s)L(s, a), 1\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \int_0^{\infty} f(y)K(ny) \, \mathrm{d}y$$

où l'on a posé, pour $x \in (0, \infty)$:

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma=\frac{3}{2}} \frac{\gamma(s)}{\gamma(1 - s)} x^{-s} \, \mathrm{d}s.$$

Démonstration. Puisque $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, la proposition 0.9 assure que sa transformée de Mellin est bien définie et holomorphe sur le demi-plan $\sigma > 0$. En intégrant par parties, on obtient tout d'abord :

$$\mathfrak{M}f(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} f'(x)x^s \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{s}\mathfrak{M}f'(s + 1). \tag{5.2}$$

Ceci fournit un prolongement méromorphe pour $\mathfrak{M}f(s)$, avec éventuellement des pôles en les entiers négatifs. Par inversion de Mellin, on a également :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)f(n) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \int_{\sigma=\frac{3}{2}} \mathfrak{M}f(s)n^{-s} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma=\frac{3}{2}} \mathfrak{M}f(s)L(s, a) \, \mathrm{d}s$$

l'interversion série/intégrale étant justifiée par le fait que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. De plus :

$$\operatorname{Res}\left(\mathfrak{M}f(s)L(s, a), 0\right) = L(0, a) \int_0^{\infty} f'(x) \, \mathrm{d}x = -f(0)L(0, a).$$

Par conséquent, sous des hypothèses convenables sur f (cf. remarque de la proposition 0.11) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)f(n) = f(0)L(0, a) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma=-\frac{1}{2}} \mathfrak{M}f(s)L(s, a) \, \mathrm{d}s.$$

Posons à présent :

$$G(s) = \mathfrak{M}f(1-s)\frac{\gamma(s)}{\gamma(1-s)} \quad ; \quad J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma=\frac{3}{2}} \frac{1}{1-s}\frac{\gamma(s)}{\gamma(1-s)}x^{1-s}\,\mathrm{d}s$$

et observons que $J'(x) = K(x)$. Enfin, d'après (5.2) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma=\frac{3}{2}} G(s)x^{-s}\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma=\frac{3}{2}} \frac{1}{s-1}\mathfrak{M}f'(2-s)\frac{\gamma(s)}{\gamma(1-s)}x^{-s}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma=\frac{3}{2}} \frac{1}{s-1}\frac{\gamma(s)}{\gamma(1-s)}x^{-s}\int_0^\infty f(y)y^{1-s}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{x}\int_0^\infty f'(y)J(xy)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{x}f(0)J(0) + \int_0^\infty f(y)K(xy)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

et ceci achève la preuve puisque $J(0) = 0$. □

Remarque. Par un argument de densité, on prouve sans peine que le théorème s'applique également lorsque f est continue à support compact, ou si c'est l'indicatrice d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

5.1 Le problème des diviseurs de Dirichlet

Ce problème concerne la fonction *nombre de diviseurs*, introduite dans la section 2.1. Cette fonction n'est pas bornée, puisque $d(2^n) = n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais croît plus lentement que n'importe quelle puissance de n. Dirichlet a établi en 1849 une estimation élémentaire sur sa fonction sommatoire [Dir49] :

$$D(x) = \sum_{n\leq x} d(n).$$

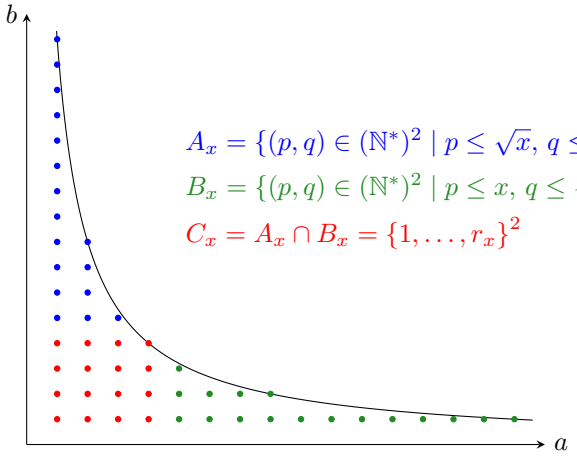
Proposition 5.3. *Lorsque $x \to \infty$:*

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\log x + (2\gamma - 1)x + \mathrm{O}(x^{1/2}).$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que :

$$D(x) = \sum_{n\leq x}\sum_{d=1}^{n} \mathbb{1}_{d|n} = \sum_{d=1}^{n}\sum_{n\leq x} \mathbb{1}_{d|n} = \sum_{d=1}^{\lfloor x\rfloor} \left\lfloor \frac{x}{d}\right\rfloor.$$

Pour calculer cette somme, nous utilisons la méthode dite de l'hyperbole de Dirichlet. En effet, $D(x)$ représente le nombre de points à coordonnées dans $\mathbb{N}^*$ situés sous l'hyperbole $ab = x$. Voici un exemple avec $x = 16$.



On constate alors que $D(x) = |A_x| + |B_x| - |C_x|$, c'est-à-dire :

$$D(x) = 2\sum_{d=1}^{r_x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - r_x^2 \quad \text{avec} \quad r_x = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \tag{5.4}$$

puisque, par symétrie :

$$|A_x| = |B_x| = \sum_{d=1}^{r_x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor .$$

On utilise à présent les encadrements :

$$\frac{x}{d} - 1 \leq \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \leq \frac{x}{d} \quad ; \quad \sqrt{x} - 1 \leq r_x \leq \sqrt{x}$$

ainsi que le développement asymptotique :

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \frac{1}{2x} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et l'égalité (5.4) fournit le résultat. □

En 1904, Gueorgui Voronoï (1868–1908) a présenté une nouvelle méthode pour améliorer l'exposant 1/2 obtenu par Dirichlet [Vor03; Vor04]. Elle repose sur une formule sommatoire similaire à celle du théorème 5.1, et fait appel aux fonctions de Bessel K_ν et Y_ν dont l'étude détaillée fait l'objet de la section annexe 5.3.

Théorème 5.5. *Lorsque $x \to \infty$:*

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \mathrm{O}(x^{1/3} \log x).$$

Démonstration. Rappelons que $\zeta(s)$ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\zeta(s)\gamma(s) = \gamma(1-s)\zeta(1-s) \quad \text{avec} \quad \gamma(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

et en vertu du corollaire 2.7, lorsque $\sigma > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta^2(s).$$

De plus, le corollaire 5.37 peut se réécrire sous la forme « symétrique » :

$$\mathfrak{M}\{4K_0(4\pi\sqrt{x}) - 2\pi Y_0(4\pi\sqrt{x})\}(s) = 2^{4s}\pi^{2s}\left(\frac{\gamma(s)}{\gamma(1-s)}\right)^2$$

donc par inversion de Mellin, pour tout $x \in (0,\infty)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma=\frac{3}{2}} \frac{\gamma(s)}{\gamma(1-s)} x^{-s}\ \mathrm{d}s = 4K_0(4\pi\sqrt{x}) - 2\pi Y_0(4\pi\sqrt{x}).$$

Par ailleurs, lorsque $s \to 1$:

$$x^{s-1} = 1 + (s-1)\log x + \mathrm{O}(s-1)^2 \quad \text{et} \quad \zeta^2(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma}{s-1} + \mathrm{O}(1)$$

d'après la proposition 1.2. Donc, pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Res}\left(\mathfrak{M}f(s)\zeta^2(s), 1\right) = \lim_{s\to 1}\int_0^\infty f(t)(2\gamma+\log t)x^{s-1}\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)(2\gamma+\log t)\ \mathrm{d}t$$

et le théorème 5.1 entraîne alors (voir [Fea16] pour une preuve rigoureuse du déplacement de la droite verticale d'intégration) :

$$\sum_{n=1}^\infty d(n)f(n) = \frac{1}{4}f(0) + \int_0^\infty f(t)(2\gamma+\log t)\ \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^\infty d(n)\int_0^\infty f(t)(4K_0(4\pi\sqrt{nt}) - 2\pi Y_0(4\pi\sqrt{nt}))\ \mathrm{d}t. \quad (5.6)$$

Il faut désormais considérer la bonne fonction f. On pourrait prendre l'indicatrice de $(0, x+1)$, mais cela ne fournit pas assez d'informations. On préfère alors prendre une fonction continue par morceaux, constante entre 0 et x, puis qui décroît entre x et un certain $y = y(x) \in (0,x)$ (voir [Coh07], pp. 183–186) :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,x] \\ 1-(t-x)/y & \text{si } t \in (x, x+y) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La formule exacte (5.6) prend alors la forme :

$$\sum_{n\le x+y} d(n)f(n) = x\log x + (2\gamma-1)x + \int_x^{x+y} f(t)(2\gamma+\log t)\ \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^\infty d(n)(4g_x(n) - 2\pi h_x(n)) \quad (5.7)$$

où l'on a défini les intégrales :

$$g_x(n) = \int_0^{x+y} f(t)K_0(4\pi\sqrt{nt})\ \mathrm{d}t \quad ; \quad h_x(n) = \int_0^{x+y} f(t)Y_0(4\pi\sqrt{nt})\ \mathrm{d}t.$$

En vertu du corollaire 5.25, l'égalité (5.7) devient :

$$D(x) + S_3(x) = x\log x + (2\gamma-1)x + \int_x^{x+y} f(t)(2\gamma+\log t)\ \mathrm{d}t - 2\pi S_1(x) - 2\pi S_2(x) + \mathrm{O}(1) \quad (5.8)$$

où l'on a défini les sommes :

$$S_1(x) = \sum_{1\le n\le y} d(n)h_x(n) \quad ; \quad S_2(x) = \sum_{n>y} d(n)h_x(n) \quad ; \quad S_3(x) = \sum_{x<n\le x+y} d(n)\left(1-\frac{n-x}{y}\right).$$

Un peu de calcul (non détaillé ici) permet de montrer que :

$$\int_x^{x+y} f(t)(2\gamma+\log t)\ \mathrm{d}t \ll y\log x.$$

Il nous suffit donc d'estimer $h_x(n)$ pour en savoir davantage sur $S_1(x)$ et $S_2(x)$. Une première intégration par parties couplée à la proposition 5.20 donne :

$$h_x(n) = \frac{1}{2\pi y\sqrt{n}}\int_x^{x+y} \sqrt{t}Y_1(4\pi\sqrt{nt})\ \mathrm{d}t \quad (5.9)$$

et de nouveau à l'aide de la proposition 5.20, cette intégrale se calcule explicitement :

$$h_x(n) = \frac{1}{4\pi^2 yn}\left((x+y)Y_2(4\pi\sqrt{n(x+y)}) - xY_2(4\pi\sqrt{nx})\right). \tag{5.10}$$

On prend à présent[3] $y(x) = x^{1/3}$. On tire de (5.9) l'estimation :

$$h_x(n) \ll \frac{1}{y\sqrt{n}}\sqrt{x+y}Y_1(4\pi\sqrt{n(x+y)}) \ll x^{1/12}n^{-1/4}. \tag{5.11}$$

Estimons d'abord $S_1(x)$. Une transformation d'Abel donne[4] :

$$S_1(x) = \sum_{n\leq y} D(n)(h_x(n) - h_x(n+1)) - D(y)h_x(y+1) + \mathrm{O}(1)$$

puis, d'après le théorème des accroissements finis et (5.11) :

$$h_x(n) - h_x(n+1) \ll x^{1/12}\left(n^{-1/4} - (n+1)^{-1/4}\right) \ll x^{1/12}n^{-5/4}$$

ce dont on déduit, avec la proposition 5.3 :

$$\sum_{n\leq y} D(n)(h_x(n) - h_x(n+1)) \ll x^{1/12}\sum_{n\leq y}\frac{n\log n}{n^{5/4}} \ll x^{1/12}y^{3/4}\log y \ll x^{1/3}\log x.$$

Enfin, $D(y)h_x(y+1) \ll D(x^{1/3}) \ll x^{1/3}\log x$, d'où :

$$\boxed{S_1(x) \ll x^{1/3}\log x.} \tag{5.12}$$

Estimons à présent $S_2(x)$. Une transformation d'Abel donne :

$$S_2(x) = \sum_{n>y} D(n)(h_x(n) - h_x(n+1)) + D(y)h_x(y+1)$$

et (5.10) implique $h_x(n) \ll x^{5/12}n^{-5/4}$. D'après le théorème des accroissements finis, on a donc :

$$h_x(n) - h_x(n+1) \ll x^{5/12}\left(n^{-5/4} - (n+1)^{-5/4}\right) \ll x^{5/12}n^{-9/4}$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{n>y} D(n)(h_x(n) - h_x(n+1)) \ll x^{5/12}y^{1/4}\log y \ll x^{1/3}\log x$$

et donc, comme précédemment :

$$\boxed{S_2(x) \ll x^{1/3}\log x.} \tag{5.13}$$

Estimer $S_3(x)$ serait difficile, et n'est en fait pas nécessaire. En utilisant simplement sa posivité, on peut déjà déduire de (5.8), (5.12) et (5.13) :

$$D(x) \leq x\log x + (2\gamma - 1)x + \mathrm{O}(x^{1/3}\log x). \tag{5.14}$$

En reprenant les mêmes calculs avec la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,x], \\ (x-t)/y & \text{si } t \in (x, x+y), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

[3] On peut montrer qu'il s'agit de l'exposant optimal pour cette méthode.

[4] On voit là toute l'utilité d'avoir obtenu une estimation élémentaire de $D(x)$ au préalable !

on aboutit à l'inégalité (5.14) dans l'autre sens, ce qui donne l'estimation attendue. □

Notons $\Delta(x) = D(x) - x\log x - (2\gamma - 1)x$ le terme d'erreur. En 1916, Hardy a démontré [Har15b] :

$$\Delta(x) \gg x^{1/4}.$$

La meilleure estimation connue à ce jour a été obtenue par Martin Huxley en 2003 [Hux03] :

$$\Delta(x) \ll x^{131/416}$$

et on conjecture que $\Delta(x) \ll x^{1/4+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

5.2 Le problème du cercle de Gauss

Ce problème concerne la fonction :

$$r_2(n) = \operatorname{card}\left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + b^2 = n\right\}$$

dont nous noterons $R_2(x)$ la fonction sommatoire, qui possède une interprétation géométrique simple. Il s'agit en effet du nombre de points à coordonnées entières situés dans le disque de rayon $\sqrt{x}$. L'estimation suivante a été établie par Gauss en 1863 [Gau63].

Proposition 5.15. *Lorsque $x \to \infty$:*

$$\sum_{n\leq x} r_2(n) = \pi x + \mathrm{O}(x^{1/2}).$$

Démonstration. Par définition :

$$R_2(x^2) = \operatorname{card}\left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + b^2 \leq x^2\right\}.$$

Considérons $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ situé dans le quadrant supérieur droit, tel que $a^2 + b^2 \leq x^2$. Si $1 \leq a \leq x$, alors il y a exactement $\left\lfloor \sqrt{x^2 - a^2} \right\rfloor$ possibilités pour b. En ajoutant les trois autres quadrants et l'origine, il vient :

$$\begin{aligned} R_2(x^2) &= 1 + 4\sum_{n\leq x} \left\lfloor \sqrt{x^2 - n^2} \right\rfloor \\ &= 4x \sum_{n\leq x} \sqrt{1 - \frac{n^2}{x^2}} + \mathrm{O}(x) \\ &= 4x^2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(x) \\ &= \pi x^2 + \mathrm{O}(x). \end{aligned}$$

□

Théorème 5.16. *Lorsque $x \to \infty$:*

$$\sum_{n\leq x} r_2(n) = \pi x + \mathrm{O}(x^{1/3}).$$

Démonstration. On peut montrer que, pour $\sigma > 1$:

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_2(n)}{n^s} = \zeta(s)L(s,\chi_4)$$

qui vérifie l'équation fonctionnelle suivante, d'après la proposition 1.5, ainsi que (0.3) et (4.22) :

$$\gamma(s)\zeta(s)L(s,\chi_4) = \gamma(1-s)\zeta(1-s)L(1-s,\chi_4) \quad \text{avec} \quad \gamma(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s).$$

Par inversion de Mellin et avec le corollaire 5.31, il vient, pour tout $x \in (0, \infty)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma=\frac{3}{2}} \frac{\gamma(s)}{\gamma(1-s)} x^{-s}\ \mathrm{d}s = 2\pi J_0(4\pi\sqrt{x}).$$

De plus, pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Res}\,(\mathfrak{M}f(s)\zeta(s)L(s,\chi_4),1) = L(1,\chi_4)\int_0^\infty f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty f(t)\ \mathrm{d}t$$

donc d'après le théorème 5.1 (voir de nouveau [Fea16]) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_2(n)f(n) = \pi\int_0^\infty f(t)\ \mathrm{d}t + 2\pi\sum_{n=1}^{\infty} r_2(n)\int_0^\infty f(t)J_0(4\pi\sqrt{nt})\ \mathrm{d}t.$$

En prenant la même fonction f que dans le théorème 5.5, on obtient la formule exacte :

$$R_2(x) = \pi(x+y) + 2\pi S_1(x) + 2\pi S_2(x) - S_3(x)$$

où l'on a posé :

$$S_1(x) = \sum_{1\leq n\leq y} r_2(n)h_x(n) \quad ; \quad S_2(x) = \sum_{n>y} r_2(n)h_x(n) \quad ; \quad S_3(x) = \sum_{x<n\leq x+y} r_2(n)\left(1-\frac{n-x}{y}\right)$$

ainsi que :

$$h_x(n) = \int_0^{x+y} f(t)J_0(2\pi\sqrt{nt})\ \mathrm{d}t.$$

Une intégration par parties couplée à la proposition 5.20 donne :

$$h_x(n) = \frac{1}{2\pi y\sqrt{n}}\int_x^{x+y} \sqrt{t}J_1(4\pi\sqrt{nt})\ \mathrm{d}t \tag{5.17}$$

puis en calculant l'intégrale, on trouve :

$$h_x(n) = \frac{1}{4\pi^2 ny}\left((x+y)J_2(4\pi\sqrt{n(x+y)}) - xJ_2(4\pi\sqrt{nx})\right) \tag{5.18}$$

et il suffit alors de suivre la même démarche que dans le théorème 5.5 en utilisant (5.17) et (5.18), ainsi que l'estimation fournie par la proposition 5.26. □

Hardy et Landau ont montré indépendamment que le terme d'erreur $\Delta(x) = R_2(x) - \pi x$ satisfait [Har15a; Lan55] :

$$\Delta(x) \gg x^{1/4}(\log x)^{1/8}.$$

La meilleure estimation connue à ce jour a été obtenue par Martin Huxley en 2000 [Hux02] :

$$\Delta(x) \ll x^{131/416}$$

et on conjecture, comme pour le problème de Dirichlet, que $\Delta(x) \ll x^{1/4+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

5.3 Annexe : Fonctions de Bessel

Dans les sections précédentes, nous avons fait usage des fonctions de Bessel, découvertes par le mathématicien Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846). Elles admettent des représentations intégrales très utiles pour calculer leurs transformées de Mellin, qui ont été plus que nécessaires dans la démarche que nous avons suivi.

Définition 5.19. *Les* fonctions de Bessel de première espèce *sont définies, pour $\nu \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, par :*

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \quad ; \quad J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

et les fonctions de Bessel de deuxième espèce *sont définies par :*

$$K_\nu(z) = \frac{\pi(I_{-\nu}(z) - I_\nu(z))}{2\sin(\pi\nu)} \quad ; \quad Y_\nu(z) = \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}$$

où le passage à la limite est sous-entendu lorsque $\nu \in \mathbb{Z}$.

Proposition 5.20. *Pour tout $\nu \in [1, \infty)$:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^\nu J_\nu(z)\right) = z^\nu J_{\nu-1}(z) \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^\nu Y_\nu(z)\right) = z^\nu Y_{\nu-1}(z).$$

Démonstration. La convergence rapide de la série définissant $J_\nu(x)$ justifie la dérivation terme à terme :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^\nu J_\nu(z)\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)2^{2n+\nu}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^{2n+2\nu}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)2^{2n+\nu}} (n+\nu) z^{2n+2\nu-1} \\
&= z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu)2^{2n+\nu-1}} z^{2n+\nu-1} \\
&= z^\nu J_{\nu-1}(z)
\end{aligned}$$

et on en déduit la même égalité sur $Y_\nu(z)$ via sa définition. □

Proposition 5.21. *Pour tous $\nu \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$:*

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu t - x\sin t)\ \mathrm{d}t - \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\nu t - x\sinh t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration. On part de la représentation suivante, vue dans la proposition 4.19 :

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^{-s} \mathrm{e}^z\ \mathrm{d}z \tag{5.22}$$

où C est un contour de Hankel partant de $-\infty$, parcourant un cercle centré en 0 dans le sens trigonométrique, puis repartant vers $-\infty$. Ainsi, par définition de $J_\nu(x)$:

$$\begin{aligned}
J_\nu(x) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \int_C z^{-n-\nu-1} \mathrm{e}^z\ \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x^2}{4z}\right)^n z^{-\nu-1} \mathrm{e}^z\ \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_C z^{-\nu-1} \exp\left(z - \frac{x^2}{4z}\right) \mathrm{d}z.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

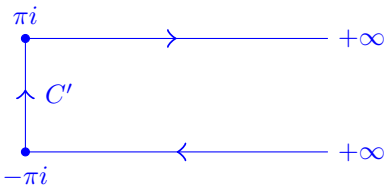
En posant $z = ux/2$, on en déduit :

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u^{-\nu-1} \exp\left(\frac{x}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)\right) \mathrm{d}u$$

puis le changement de variable $u = \mathrm{e}^y$ donne :

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \exp(-\nu y + x \sinh y)\ \mathrm{d}y$$

où le contour C' est défini comme suit.



En résumé :

$$2\pi i J_\nu(x) = iA_1(x) + A_2(x) + A_3(x)$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}
A_1(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-\nu i t + x \sinh(it))\ \mathrm{d}t, \\
A_2(x) &= \int_0^{\infty} \exp(-\nu(\pi i + t) + x \sinh(\pi i + t))\ \mathrm{d}t, \\
A_3(x) &= \int_0^{\infty} \exp(-\nu(-\pi i + t) + x \sinh(-\pi i + t))\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Le résultat final s'obtient en simplifiant ces intégrales, à l'aide de l'égalité $\sinh(\pm\pi i + t) = -\sinh t$. □

Corollaire 5.24. *Pour tous $\nu \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}
K_\nu(x) &= \int_0^{\infty} \cosh(\nu t) \exp(-x \cosh t)\ \mathrm{d}t, \\
Y_\nu(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \sin t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-x \sinh t) \left(\mathrm{e}^{\nu t} + \cos(\pi\nu)\mathrm{e}^{-\nu t}\right)\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Démonstration. Par une démarche analogue à celle de la proposition 5.21, on montre sans difficulté :

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\nu t) \exp(x \cos t)\ \mathrm{d}t - \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\nu t - \cosh t)\ \mathrm{d}t$$

et la définition de $K_\nu(x)$ permet de conclure. La formule pour $Y_\nu(x)$ est obtenue en reprenant la preuve de la proposition 5.21. On obtient en effet :

$$\pi \sin(\pi\nu) Y_\nu(x) = A_1(x) - A_2(x) - \sin(\pi\nu) A_3(x)$$

où l'on a posé cette fois :

$$\begin{aligned}
A_1(x) &= \cos(\pi\nu) \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - \nu t)\ \mathrm{d}t, \\
A_2(x) &= \int_0^{\pi} \cos(x \sin t + \nu t)\ \mathrm{d}t, \\
A_3(x) &= \int_0^{\infty} \exp(-x \sinh t) \left(\mathrm{e}^{\nu t} + \cos(\pi\nu)\mathrm{e}^{-\nu t}\right)\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Reste à développer $\cos(\pi\nu)\cos(x \sin t - \nu t)$ et à changer t en $\pi - t$ dans $A_1(x)$. □

Corollaire 5.25. *Lorsque $x \to \infty$, $K_0(x) \ll \mathrm{e}^{-x}$.*

Démonstration. Il suffit d'observer que si $x \geq 1$, alors :

$$\int_0^\infty \exp(-x(\cosh t - 1))\ \mathrm{d}t \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t < \infty$$

et le corollaire 5.24 permet de conclure. □

Proposition 5.26. *Soit $\nu \in \mathbb{Z}$. Lorsque $x \to \infty$:*

$$J_\nu(x) = \cos\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\sqrt{\frac{2}{\pi x}} + \frac{1-4\nu^2}{8}\sin\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\sqrt{\frac{2}{\pi x^2}} + \mathrm{O}(x^{-5/2}).$$

Démonstration. Nous suivons la méthode dite de la phase stationnaire. Posons, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$G_\nu(x) = \int_0^\pi \exp(-i(\nu t - x\sin t))\ \mathrm{d}t$$

de sorte que $\pi J_\nu(x) = \mathrm{Re}(G_\nu(x))$ d'après la proposition 5.21. En changeant t en $t - \pi/2$, on obtient :

$$G_\nu(x) = \mathrm{e}^{-i\nu\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-i\nu t}\mathrm{e}^{ix\cos t}\ \mathrm{d}t.$$

En changeant maintenant t en $-t$ et en additionnant les deux intégrales, on obtient :

$$G_\nu(x) = \mathrm{e}^{-i\nu\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\nu t)\mathrm{e}^{ix\cos t}\ \mathrm{d}t.$$

On effectue à présent le changement de variable :

$$\cos t = 1 - \frac{u^2}{2} \quad \text{i.e.} \quad u = \sqrt{2(1-\cos t)} = 2\sin(t/2) = 1 - \frac{t^3}{24} + \mathrm{O}(t^5)$$

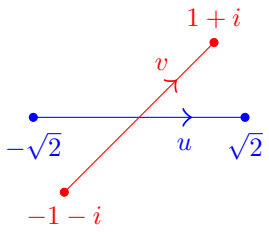
c'est-à-dire :

$$t = 2\arcsin(u/2) \quad ; \quad \mathrm{d}t = \left(1 - \frac{u^2}{4}\right)^{-1/2}\mathrm{d}u = \left(1 + \frac{u^2}{8} + \mathrm{O}(u^4)\right)\mathrm{d}u.$$

Après quelques calculs, on obtient :

$$G_\nu(x) = \exp\left(ix - \frac{\nu}{2}i\pi\right)\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1-4\nu^2}{8}u^2 + \mathrm{O}(u^4)\right)\mathrm{e}^{-ixu^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

On fait à présent pivoter l'intervalle d'intégration pour obtenir une décroissance rapide de l'exponentielle :



en posant $v = \mathrm{e}^{i\pi/4}u$, de sorte que $u^2 = -iv^2$. Ainsi :

$$G_\nu(x) = \exp\left(ix - \frac{2\nu+1}{4}i\pi\right)\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{4\nu^2-1}{8}iv^2 + \mathrm{O}(v^4)\right)\mathrm{e}^{-xv^2/2}\ \mathrm{d}v$$

et le terme en $\mathrm{O}(v^4)$ ne dépend pas de x, ce qui entraîne :

$$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8} iv^2 + \mathrm{O}(v^4)\right) \mathrm{e}^{-xv^2/2} \, \mathrm{d}v = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-x})$$

et de même pour l'intégrale sur $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$. En résumé :

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left(\exp\left(ix - \frac{2\nu+1}{4} i\pi\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8} iv^2 + \mathrm{O}(v^4)\right) \mathrm{e}^{-xv^2/2} \, \mathrm{d}v\right) + \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-x}). \tag{5.27}$$

Enfin, on peut montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^4 \mathrm{e}^{-xv^2/2} \, \mathrm{d}v = \mathrm{O}(x^{-5/2})$$

en répétant les intégrations par parties. Le résultat final s'obtient alors en développant (5.27). □

Corollaire 5.28. *Soit $\nu \in \mathbb{Z}$. Lorsque $x \to \infty$:*

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) + \mathrm{O}(x^{-3/2}).$$

Démonstration. On utilise l'égalité :

$$\cos(\pi\nu) \cos\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{1-2\nu}{4}\pi\right) = \sin(\pi\nu) \sin\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)$$

et la proposition 5.26 permet de conclure. □

Proposition 5.29. *Si $\nu \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{C}$ vérifient $-\nu < \sigma < \nu + 2$, alors, sous réserve d'existence :*

$$\mathfrak{M} J_\nu(s) \Gamma\left(\frac{\nu - s + 2}{2}\right) = 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{\nu + s}{2}\right).$$

Démonstration. Tout d'abord, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\operatorname{Re}\lambda > -1$, alors :

$$\int_0^{\infty} x^\lambda \mathrm{e}^{-zx^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) z^{-\frac{\lambda+1}{2}}. \tag{5.30}$$

Cela se démontre sans peine lorsque $z \in (0, \infty)$ à l'aide du changement de variable $u = zx^2$ puis reste valable pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$ par prolongement analytique. Reprenons maintenant (5.23) :

$$\mathfrak{M} J_\nu(s) = \frac{1}{2\pi i} 2^{-\nu} \int_C z^{-\nu-1} \int_0^{\infty} x^{\nu+s-1} \exp\left(z - \frac{x^2}{4z}\right) \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x.$$

Puisque $\sigma > -\nu$, on peut appliquer (5.30) à $\lambda = \nu + s - 1$ pour obtenir :

$$\mathfrak{M} J_\nu(s) = \frac{1}{2\pi i} 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{\nu+s}{2}\right) \int_C z^{-\frac{\nu-s+2}{2}} \mathrm{e}^z \, \mathrm{d}z$$

et on reconnaît l'égalité (5.22) appliquée à $(\nu - s + 2)/2$, valable puisque $\sigma < \nu + 2$. □

Corollaire 5.31. *Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \sigma < 3/4$:*

$$\mathfrak{M}\{J_0(\sqrt{x})\}(s) = 4^s \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}.$$

Démonstration. En vertu des propositions 0.9 et 5.26, la transformée de Mellin de J_0 est bien définie pour $0 < \sigma < 1/2$. Le développement (5.27) étant exact, le terme oscillant permet de prolonger de manière analytique cette formule pour $0 < \sigma < 3/2$. Par conséquent, si $0 < \sigma < 3/4$, le changement de variable $x = y^2$ donne :

$$\int_0^\infty J_0(\sqrt{x})x^{s-1}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty J_0(y)y^{2s-1}\,\mathrm{d}y$$

et on peut maintenant appliquer la proposition 5.29 à $\nu = 0$. □

Proposition 5.32. *Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma > 0$:*

$$\mathfrak{M}K_0(s) = 2^{2s-1}\Gamma(s)^2.$$

Démonstration. On calcule d'abord la transformée de Mellin de $K_0(\sqrt{x})$, qui est bien définie et holomorphe sur le demi-plan $\sigma > 0$ d'après la proposition 0.9 et le corollaire 5.25. De plus, en vertu du corollaire 5.24 :

$$\mathfrak{M}K_0(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-\sqrt{x}\cosh t)x^{s-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{x}\cosh t$ à t fixé :

$$\mathfrak{M}K_0(s) = \int_0^\infty \frac{1}{(\cosh t)^{2s}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{2s-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 2\Gamma(2s)\int_0^\infty \frac{1}{(\cosh t)^{2s}}.$$

Rappelons que $(\cosh t)^{-2} = 1 - \tanh^2 t$, donc le changement de variable $u = \tanh^2 t$ et l'égalité (0.6) donnent :

$$\mathfrak{M}K_0(s) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{s-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(s,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(s+\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}.$$

La formule de duplication de Legendre donne alors :

$$\mathfrak{M}K_0(s) = \sqrt{\pi}\Gamma(2s)\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^{2s-1}\Gamma(s)^2.$$ □

Proposition 5.33. *Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \sigma < 3/2$:*

$$\mathfrak{M}Y_0(s) = -\frac{1}{\pi}2^{s-1}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2.$$

Démonstration. D'après la proposition 0.9 et le corollaire 5.28, la transformée de Mellin de Y_0 est bien définie pour $0 < \sigma < 3/2$ (cf. preuve du corollaire 5.31). D'après le corollaire 5.24, on a $Y_0(x) = F(x) - G(x)$, avec :

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad G(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp(-x\sinh t)\,\mathrm{d}t.$$

On suppose pour le moment que $0 < \sigma < 1$. Calculons d'abord $\mathfrak{M}F(s)$. En posant $u = x\sin t$, il vient :

$$\mathfrak{M}F(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{(\sin t)^s}\int_0^\infty \sin(u)u^{s-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = \mathfrak{M}\sin(s)\int_0^\pi \frac{1}{(\sin t)^s}\,\mathrm{d}t. \tag{5.34}$$

Or, pour $y \in (0,\infty)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$:

$$y^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-ty}\,\mathrm{d}t.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\sin(s) &= \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^\infty t^{-s}\sin(u)\mathrm{e}^{-tu}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^\infty t^{-s}\mathcal{L}\sin(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^\infty \frac{t^{-s}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

puis en posant $v = t^2$:

$$\mathfrak{M}\sin(s) = \frac{1}{2\Gamma(1-s)}\int_0^\infty \frac{v^{-\frac{s+1}{2}}}{v+1}\,\mathrm{d}v \underset{(0.5)}{=} \frac{1}{2\Gamma(1-s)}\mathrm{B}\left(\frac{1-s}{2},\frac{1+s}{2}\right).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\sin(s) &\underset{(0.6)}{=} \frac{1}{2\Gamma(1-s)}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2\Gamma(1-s)}\Gamma\left(1-\frac{1+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\\ &\underset{(0.2)}{=} \frac{\pi}{2\Gamma(1-s)}\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right)^{-1}\\ &= \frac{\pi}{2\Gamma(1-s)}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{-1}\\ &\underset{(0.2)}{=} \Gamma(s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right).\end{aligned}$$

L'égalité (5.34) devient alors :

$$\mathfrak{M}F(s) = \frac{\Gamma(s)}{\pi}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\widetilde{F}(s) \quad \text{avec} \quad \widetilde{F}(s) = \int_0^\pi (\sin t)^{-s}\,\mathrm{d}t.$$

En scindant $\widetilde{F}(s)$ en deux intégrales et en changeant t en $t-\pi/2$ dans la seconde, il vient :

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(s) &= \int_0^{\pi/2}(\sin t)^{-s}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi}(\sin t)^{-s}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi/2}(\sin t)^{-s}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2}(\cos t)^{-s}\,\mathrm{d}t\\ &\underset{(0.4)}{=} \mathrm{B}\left(\frac{1-s}{2},\frac{1}{2}\right)\\ &\underset{(0.6)}{=} \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

La formule des compléments et l'égalité (1.12) nous donnent enfin :

$$\boxed{\mathfrak{M}F(s) = 2^s\Gamma(s)\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)^{-2} = 2^{s-1}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{-1}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)^{-2}.} \tag{5.35}$$

Calculons à présent $\mathfrak{M}G(s)$. Comme précédemment, on pose $u = x\sinh t$ de sorte que :

$$\mathfrak{M}G(s) = \frac{1}{\pi}2^s\Gamma(s)\widetilde{G}(s) \quad \text{avec} \quad \widetilde{G}(s) = \int_0^\infty \frac{1}{(\sinh t)^s}\,\mathrm{d}t$$

que l'on peut expliciter :

$$\begin{aligned}\widetilde{G}(s) &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-st}}{(1-\mathrm{e}^{-2t})^s}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^s}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 v^{(s/2)-1}(1-v)^{-s}\,\mathrm{d}v \\ &\underset{(0.6)}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{s}{2}, 1-s\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (0.2) et (0.6) :

$$\boxed{\mathfrak{M}G(s) = \frac{2^s\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma(1-s)}{4\pi\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} = 2^{s-2}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2} \tag{5.36}$$

puis en combinant (5.35) et (5.36), on obtient :

$$\mathfrak{M}Y_0(s) = \frac{1}{\pi}2^{s-2}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)^{-1}\left(2\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)^{-2} - \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-2}\right).$$

La formule des compléments fournit le résultat souhaité, et celui-ci s'étend à $0 < \sigma < 3/2$ par prolongement analytique. □

Corollaire 5.37. *Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \sigma < 3/4$:*

$$\mathfrak{M}\{4K_0(\sqrt{x}) - 2\pi Y_0(\sqrt{x})\}(s) = 2^{2s+1}\Gamma(s)^2\cos^2\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

Démonstration. Les propositions 5.32 et 5.33 donnent, via le changement de variable $x = y^2$:

$$\mathfrak{M}\{4K_0(\sqrt{x}) - 2\pi Y_0(\sqrt{x})\}(s) = 2^{2s+1}\Gamma(s)^2(1+\cos(\pi s)) = 2^{2s+1}\Gamma(s)^2\cos^2\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

et la formule de duplication de Legendre entraîne :

$$\mathfrak{M}\{4K_0(\sqrt{x}) - 2\pi Y_0(\sqrt{x})\}(s) = \frac{1}{\pi}2^{4s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

Le résultat se déduit alors de la formule des compléments, comme dans le calcul de $\mathfrak{M}\sin(s)$. □

Bibliographie

[Apé79] R. Apéry, « Irrationnalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ », *Astérisque*, vol. 61, 1979, pp. 11–13.

[Bal22] K. Ball, « The functional equation for ζ », 2022.

[CBY11] B. Conrey, H. M. Bui, M. P. Young, « More than 41% of the zeros of the zeta function are on the critical line », *Acta Arithmetica*, vol. 150, 2011, pp. 35–64.

[Coh07] H. Cohen, *Number Theory, Volume II: Analytic and Modern Tools*, 2007.

[Con89] J. B. Conrey, « More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line », *J. Reine Angew. Math.*, vol. 399, 1989, pp. 1–26.

[Dir49] G. L. Dirichlet, « Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie », *Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenchaften*, 1849, pp. 69–83.

[Edw01] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, 2001.

[Erd49] P. Erdös, « On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem », *PNAS*, vol. 35, 1949, pp. 374–384.

[Eul40] L. Euler, « De summis serierum reciprocarum », *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 7, 1740, pp. 123–134.

[Eul43] L. Euler, « Démonstration de la somme de cette suite $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36 +$ etc. » *Journal lit. d'Allemagne, de Suisse et du Nord*, vol. 2, 1743, pp. 115–127.

[Fea16] J.-C. Feauveau, « Une approche unifiée pour les formules sommatoires », 2016.

[Gau63] C. F. Gauss, « Werke », no. 2, 1863, pp. 269–291.

[Had96] J. Hadamard, « Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques », *Bulletin de la SMF*, vol. 24, 1896, pp. 199–220.

[Har15a] G. H. Hardy, « On the expression of a number as the sum of two squares », *Quarterly Journal of Mathematics*, no. 46, 1915, pp. 263–283.

[Har15b] G. H. Hardy, « On Dirichlet's divisor problem », *Proc. London Math. Soc.*, vol. 15, no. 2, 1915, pp. 1–25.

[HL21] G. H. Hardy, J. Littlewood, « The Zeros of Riemann's Zeta-Function on the Critical Line », 1921.

[Hux02] M. N. Huxley, « Integer points, exponential sums and the Riemann zeta function », *Number theory for the millennium, II: Papers from the conference held at the University of Illinois at Urbana–Champaign, Urbana, IL, May 21–26, 2000*, 2002, pp. 275–290.

[Hux03] M. N. Huxley, « Exponential sums and lattice points III », *Proc. London Math. Soc.*, vol. 87, no. 3, 2003, pp. 591–609.

[Ike31] S. Ikehara, « An extension of Landau's theorem in the analytic theory of numbers », *Journal of Mathematics and Physics of the MIT*, vol. 10, 1931, pp. 1–12.

[Koc01] H. von Koch, « Sur la distribution des nombres premiers », *Acta Arithmetica*, vol. 24, 1901, pp. 159–182.

[Kor05] J. Korevaar, « The Wiener-Ikehara theorem by complex analysis », *Proc. American Math. Soc.*, vol. 134, no. 4, 2005, pp. 1107–1116.

[La 96] C.-J. de La Vallée Poussin, « Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers », *Annales de la société scientifique de Bruxelles*, vol. 20, 1896, pp. 183–256, 281–361.

[Lan55] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, vol. 2, 1955, p. 189.

[Leg97] A.-M. Legendre, « Essai sur la théorie des nombres », 1797.

[Lev74] N. Levinson, « More than one third of zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$ », *Adv. Math.*, vol. 13, no. 4, 1974, pp. 383–436.

[Lin08] E. L. Lindelöf, « Quelques remarques sur la croissance de la fonction $\zeta(s)$ », *Bulletin des sciences mathématiques*, série n°2, vol. 32, 1908, pp. 341–356.

[Man95] H. von Mangoldt, « Zu Riemanns Abhandlung “Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse” », *J. Reine Angew. Math.*, vol. 114, 1895, pp. 255–305.

[Rie59] B. Riemann, « Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse », 1859.

[Riv00] T. Rivoal, « La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 331, no. 4, 2000, pp. 267–270.

[Sel42] A. Selberg, « On the zeros of Riemann's zeta-function », *SHR. Norske Vid. Akad. Oslo*, 1942, pp. 1–59.

[Sel49] A. Selberg, « An elementary proof of the prime-number theorem », *Ann. Math.*, vol. 50, no. 2, 1949, pp. 305–313.

[Tch52] P. Tchebychev, « Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, série n°1, vol. 17, 1852, pp. 341–365.

[Ten] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, édition n°3.

[Vor03] G. Voronoï, « Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques », *J. Reine Angew. Math.*, vol. 1903, no. 126, 1903, pp. 241–282.

[Vor04] G. Voronoï, « Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries (suite) », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, série n°3, vol. 21, 1904, pp. 459–533.

[Zud01] W. Zudilin, « One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational », *Russian Mathematical Surveys*, vol. 56, no. 4, 2001, pp. 774–776.