Oraux de mathématiques aux concours

Giovanni Lebaron – Lycée Thiers – MP*

Préambule

Ce document regroupe 256 exercices de mathématiques posés à l'oral aux élèves de MP** du lycée Thiers en 2022, et de MP* entre 2023 et 2026. Certains d'entre eux n'ont pas pu être traités ou explorés intégralement, et il sera donc indiqué en-dessous de ceux qui proposaient davantage de questions :

Il restait des questions mais l'élève n'a pas eu le temps de poursuivre.

Certaines questions qui auraient pu suivre dans l'oral seront parfois ajoutées, et il sera plutôt indiqué :

Il restait probablement des questions ; si tel est le cas, en voici une ou plusieurs qui auraient pu être posées.

Vous trouverez également un bon nombre de notes de bas de page, qui précisent certains mots de vocabulaire introduits dans l'énoncé ou proposent une ouverture sur des notions mathématiques proches de ce dont l'exercice traite ; jetez-y un coup d'oeil ! Elles seront indiquées par un nombre entre crochets en exposant, comme ici.[1]

Sommaire

Les exercices sont regroupés par concours, et classés selon les grands thèmes suivants (liens cliquables) :

- Algèbre bilinéaire, espaces euclidiens ;
- Algèbre linéaire, polynômes, réduction ;
- Analyse, topologie ;
- Calcul différentiel ;
- Groupes, anneaux, arithmétique ;
- Probabilités.

La dernière page de ce document est consacrée aux indications, qui étaient fournies dès le début avec l'énoncé, ou qui sont apparues au cours de l'échange, pour les oraux qui s'y prêtent (notamment pour les exos posés à l'X ou aux ENS). Lorsqu'un exercice en propose, vous trouverez en-dessous de son énoncé la mention :

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Les titres des exercices préciseront l'année à laquelle ils ont été donnés lorsque je les ai récupérés, donc sans doute pas pour la première fois ! Dans le titre seront aussi précisées les autres années où est apparu l'exercice, une référence éventuelle dans la littérature, et la présence d'un corrigé en fin de document s'il en existe un. Vous pouvez me contacter à l'adresse `prenom.nom[at]ens-rennes.fr` (voir le lien ci-dessous). Enjoy !

Le document se trouve sur ma page web : `https://perso.ens-rennes.fr/giovanni.lebaron/`.

[1] Voici un exemple de note de bas de page.

Notations

$A^\times$	groupe des inversibles de l'anneau A
$A[X]$	espace des polynômes à coefficients dans A
$A_n[X]$	sous-espace des polynômes à coefficients dans A de degré au plus n
π_u	polynôme minimal de u
χ_u	polynôme caractéristique de u
$\ker u$	noyau de u
$\operatorname{im} u$	image de u
$\operatorname{rg} u$	rang de u
$\det u$	déterminant de u
$\operatorname{tr} u$	trace de u
$\operatorname{spec} u$	spectre de u
$\mathscr{L}(E)$	espace des endomorphismes de E
$\mathrm{M}_{n,p}(K)$	espace des matrices $n \times p$ à coefficients dans K
$\mathrm{M}_n(K)$	espace des matrices $n \times n$ à coefficients dans K
$\mathrm{GL}_n(K)$	groupe des inversibles de $\mathrm{M}_n(K)$
$\mathrm{SL}_n(K)$	noyau du déterminant $\mathrm{GL}_n(K) \to K^\times$
$\operatorname{card}(E)$	cardinal de l'ensemble E
id_E	application identité de l'ensemble E
$\mathfrak{S}_n$	groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$
I_n	matrice identité de taille n
A^T	transposée de la matrice A
$\operatorname{com}(A)$	comatrice de A
$\langle x, y \rangle$	produit scalaire canonique de x et y
$\|x\|_2$	norme euclidienne canonique de x
$\|\|\|f\|\|\|$	norme subordonnée de l'application f
$\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$	espace des matrices symétriques réelles $n \times n$
$\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$	sous-espace des matrices positives de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$
$\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$	sous-espace des matrices définies positives de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$
$\mathrm{O}(n)$	espace des matrices orthogonales réelles $n \times n$
$\mathrm{SO}(n)$	noyau du déterminant $\mathrm{O}(n) \to \{-1, 1\}$
$\mathscr{C}^k(E, F)$	ensemble des fonctions $E \to F$ de classe $\mathscr{C}^k$
$\partial_k f$	dérivée partielle de f par rapport à la $k^{\text{ème}}$ variable
$\mathrm{d}f$	différentielle de f
∇f	gradient de f
$\nabla^2 f$	matrice hessienne de f
Δf	laplacien de f
$\mathbb{P}(A)$	probabilité de A
$\mathbb{E}(X)$	espérance de X
$\mathbb{V}(X)$	variance de X
$\operatorname{cov}(X, Y)$	covariance de X et Y
$\mathcal{B}(p)$	loi de Bernoulli de paramètre p
$\mathcal{B}(n, p)$	loi binomiale de paramètres n, p
$\mathcal{P}(\lambda)$	loi de Poisson de paramètre λ

Algèbre bilinéaire, espaces euclidiens

Le coefficient d'indice (i,j) d'une matrice A (en majuscule) sera systématiquement noté $a_{i,j}$ (en minuscule).

Exercice 1 : CCINP 2024

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, ainsi que $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
On suppose que f est de rang n et que f^* est de rang p.

1. Montrer que $f^* \circ f$ est un automorphisme d'un espace vectoriel à préciser.

2. On pose $g = f \circ (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$. Montrer que g est un endomorphisme auto-adjoint.

3. Montrer que g est la projection orthogonale sur f.

Exercice 2 : Centrale 2022

1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\varphi : (x,y) \longmapsto \langle Ax, Ay\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2.a) En déduire qu'il existe $Q \in \mathrm{O}(n)$ et $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.[2]

2.b) Étendre le résultat à $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : Centrale 2022

1. Montrer que si $U \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors U admet une unique racine carrée dans $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si $U, V \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{tr}(UV) \geq 0$.

3. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On considère une fonction dérivable $f : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi que $P \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer que l'application $\mathrm{tr} \circ P \circ f$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

Exercice 4 : Centrale 2023

Soient E un espace euclidien et $s \in \mathscr{L}(E)$.

1. Établir l'identité du parallélogramme et l'identité de polarisation.

2. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

   (i) $\exists c \geq 0,\ \forall x, y \in E,\ \langle s(x), s(y)\rangle = c\,\langle x, y\rangle$;

   (ii) $\forall x, y \in E,\ \langle x, y\rangle = 0 \implies \langle s(x), s(y)\rangle = 0$.

3. Trouver tous les $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u\left(V^\perp\right) \subseteq u(V)^\perp$ pour tout sous-espace vectoriel V de E.

[2] On peut montrer que $S \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ce qui donne le résultat appelé *décomposition polaire*. On peut montrer que l'application associée $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{O}(n) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ainsi définie est un homéomorphisme, c'est-à-dire une bijection continue dont la réciproque est également continue. Tout ceci se transpose aux espaces hermitiens, et fournit un homéomorphisme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{U}(n) \times \mathrm{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

Exercice 5 : Centrale 2026

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, et on définit la forme quadratique Q par :

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2.$$

On considère l'hyperplan H d'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ avec $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la restriction de Q à H soit positive.

Exercice 6 : Mines 2022

Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |b_{i,j}| \leq n\sqrt{\operatorname{rg} B}.$$

Exercice 7 : Mines 2024

Soient E un espace euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Exercice 8 : Mines 2024

Soient S une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. On suppose que, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$:

$$f(v) \in S \quad \text{et} \quad v - f(v) \in S^{\perp}.$$

Montrer que S est un espace vectoriel, et que f est la projection orthogonale sur S.

Exercice 9 : Mines 2024

On considère $A \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} < 0$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distincts.

Pour $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $|X| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

1. Comparer $X^{\mathsf{T}}AX$ et $\left|X^{\mathsf{T}}\right| A \, |X|$.

2. Montrer que pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$\left(Y^{\mathsf{T}}AX\right)^2 \leq \left(Y^{\mathsf{T}}AY\right)\left(X^{\mathsf{T}}AX\right).$$

3.a) Montrer que si $X \in \ker(A) \setminus \{0\}$, alors aucun coefficient de X n'est nul.

3.b) Montrer que $\dim \ker(A) \leq 1$.

Il restait des questions mais l'élève n'a pas eu le temps de poursuivre.

Exercice 10 : Mines 2024

On considère le produit scalaire suivant sur $E = \mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^\infty P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On se donne $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et pour $P \in E$, on définit l'application :

$$\begin{aligned} u_P : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^\infty \Pi(x+t)P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

1. Montrer que l'application $u : P \longmapsto u_P$ définit un automorphisme auto-adjoint de E.

2. On considère une base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u, chaque P_i étant associé à la valeur propre λ_i. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\Pi(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x)P_k(y).$$

Exercice 11 : Mines 2024

Soit $A \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{com}(A) \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 12 : X 2022 (*Oraux X-ENS, Algèbre 3*, Cassini)

On pose $G = \mathrm{SO}(3)$, et on considère un sous-groupe H de G tel que[3] :

$$\forall g \in G,\ \forall h \in H,\ ghg^{-1} \in H.$$

Montrer que $H = \{I_3\}$ ou $H = G$.[4]

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 13 : ENS U 2022 (corrigé)

Montrer que $M \longmapsto \mathrm{tr}\,(\exp M)$ est convexe sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

[3] Un tel sous-groupe H est appelé *distingué* ou *normal*, ce que l'on note $H \trianglelefteq G$. On montre que H est distingué si et seulement si l'ensemble des classes à gauche modulo H coïncide avec celui des classes à droite, c'est-à-dire $\{gH \mid g \in G\} = \{Hg \mid g \in G\}$. Ces sous-groupes permettent de construire les *groupes quotients*, dont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un exemple célèbre : on définit $G/H = G/\mathcal{R}$, où la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est définie par $x\mathcal{R}y \iff xy^{-1} \in H$, et cet ensemble peut être muni d'une structure de groupe héritée de celle de G, lorsque $H \trianglelefteq G$. Par exemple, dans le cas de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, la relation $\mathcal{R}$ n'est autre que la congruence modulo n.

[4] Un tel groupe G est appelé *simple*. Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est simple si, et seulement si, $n = 3$ ou $n \geq 5$.

Algèbre linéaire, polynômes, réduction

Sauf mention contraire, la lettre K désignera toujours le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Exercice 14 : CCINP 2023

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & a \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de A.
3. Calculer le polynôme minimal et les valeurs propres de A. En déduire son polynôme caractéristique.

Exercice 15 : CCINP 2023

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer le polynôme minimal de A.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire $\exp(A)$.
4. Montrer que A est semblable à :[5]
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
5. Trouver une autre méthode pour calculer A^n.

[5] La matrice B est appelée la *réduite de Jordan* de A. Le théorème de décomposition de Frobenius, dont la décomposition de Jordan est un cas particulier, fournit une classification complète des matrices à similitude près sur un corps quelconque.

Exercice 16 : CCINP 2023

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a & a \\ b & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a \\ b & \cdots & b & b & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Lorsque $a = b$, A est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que :

$$P = \begin{vmatrix} X+\lambda & X-a & \cdots & X-a & X-a \\ X-b & X+\lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X+\lambda & X-a \\ X-b & \cdots & X-b & X-b & X+\lambda \end{vmatrix}$$

est un polynôme de degré au plus 1.

3. En déduire le polynôme caractéristique de A, et discuter le caractère diagonalisable de A.

Exercice 17 : CCINP 2023

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^{\mathsf{T}}A$.

1. Démontrer, pour tout $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\ker\left(A^2 - \mu^2 I_n\right) = \ker(A - \mu I_n) \overset{\perp}{\oplus} \ker(A + \mu I_n).$$

2. Trouver toutes les matrices réelles A vérifiant $A^2 = A^{\mathsf{T}}A$.

Exercice 18 : CCINP 2023

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f \neq 0$ et $f^3 = -f$. On pose $F = \ker(f)$ et $G = \ker\left(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)$.

1. Montrer que $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$.

2. Soit $v \in G \setminus \{0\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ et que $(v, f(v))$ est une base de G.

3. Soit $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 : CCINP 2023

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose A nilpotente. Montrer que $\mathrm{spec}(A) = \{0\}$. En déduire que $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. On suppose à présent que $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. On note :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

En établissant que $(m_1, \dots, m_p)$ est solution d'un système linéaire $p \times p$, montrer que $0 \in \mathrm{spec}(A)$.

3. Par un raisonnement similaire, montrer que $\mathrm{spec}(A) = \{0\}$. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 20 : CCINP 2024

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. On considère $f, g \in \mathscr{L}(E)$ telles que :

$$f \circ g - g \circ f = f.$$

L'objectif est de montrer que f est nilpotente de trois manières différentes.

1.a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$.

1.b) Conclure en étudiant l'application :

$$\begin{aligned} u : \mathscr{L}(E) &\longrightarrow \mathscr{L}(E) \\ h &\longmapsto h \circ g - g \circ h. \end{aligned}$$

2) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P(f)$, puis conclure.

3.a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(f^k) = 0$.

3.b) Montrer que f ne possède qu'une seule valeur propre, puis conclure.

Exercice 21 : Centrale 2022

Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_A : M \longmapsto AM$ et $\psi_A : M \longmapsto MA$.

1. Montrer que φ_A et ψ_A sont des endomorphismes de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Calculer $P(\varphi_A)$ et $P(\psi_A)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$. Quel est le polynôme minimal de φ_A et ψ_A ?

3. On suppose que $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables. Montrer que φ_A, ψ_B et $\varphi_A - \psi_B$ sont diagonalisables. Montrer qu'on peut les diagonaliser dans une même base constituée de matrices de rang 1.

Exercice 22 : Centrale 2022

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le $n^{\text{ème}}$ *nombre harmonique* par :[6]

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Notons $H_n = s_n/t_n$ sous forme irréductible. Écrire une fonction `decomposition(n)` qui renvoie (s_n, t_n).

2. Calculer avec Python le reste de la division euclidienne de s_{p-1} par p^2 pour les nombres premiers $p \leq 100$, et émettre une conjecture. On pourra utiliser `sympy.ntheory.generate.nextprime(n)` qui renvoie le plus petit nombre premier supérieur ou égal à n.

3. On considère un nombre premier $p \geq 5$ ainsi que le polynôme :

$$Q = \prod_{k=1}^{p-1}(X+k) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

Montrer que les a_k sont entiers. Expliciter a_0 et a_{p-1}.

4. Montrer que $a_1 = (p-1)!H_{p-1}$.

5. Montrer que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.[7]

6. Soient $V = \left(i^j\right)_{1\leq i,j\leq p-2}$ et $a = (a_1, \ldots, a_{p-2})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathbb{R}^{p-2}$ tel que $Va = pB$.

7. En déduire que p divise $a_1, \ldots, a_{p-2}$.

Exercice 23 : Centrale 2022

On note $N_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $M \in N_n(\mathbb{C})$, on désigne par $\nu(M)$ l'indice de nilpotence de M. On note enfin $\mathbb{C}[M]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes en M.

1. Soit $N \in N_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathbb{C}[N]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $\nu(N)$.

2. Soit $N \in N_n(\mathbb{C})$. Montrer que $N + I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, puis que $N^2 + 2N \in N_n(\mathbb{C})$ avec $\nu(N^2+2N) = \nu(N)$.

3. Montrer que $\phi : N \longmapsto N^2 + 2N$ réalise une injection de $N_n(\mathbb{C})$ dans lui-même.

Exercice 24 : Centrale 2022

Pour $A \in \mathrm{M}_n(K)$, on définit les applications $\varphi_A : M \longmapsto \mathrm{tr}(AM)$ et $\tau_A : M \longmapsto MA - AM$.

1. On suppose que A est nilpotente. Montrer que $\ker(\tau_A) \subseteq \ker(\varphi_A)$.

2. On suppose qu'il existe $B \in \mathrm{M}_n(K)$ telle que $A = BA - AB$. Calculer $BP(A) - P(A)B$ pour $P \in K[X]$. En déduire que A est nilpotente.

3. Caractériser les hyperplans H de $\mathrm{M}_n(K)$ vérifiant $\mathrm{im}(\tau_A) \subseteq H$. En déduire l'existence de $B \in \mathrm{M}_n(K)$ telle que $B = BA - AB$.

4. Montrer que $A\exp(I_n + B) = \exp(B)A$.

[6] On peut montrer que $H_n \notin \mathbb{N}$ dès que $n \geq 2$, ce qui peut paraître surprenant au vu de sa vitesse de croissance extrêmement faible (logarithmique en l'occurrence), à tel point que le plus petit entier n tel que $H_n \geq 20$ vaut exactement 272 400 600.

[7] C'est le théorème de Wilson, qui est un cas particulier du résultat plus général suivant : si G est un groupe abélien fini, le produit des éléments de G est égal à son neutre, sauf s'il existe un unique $x \in G$ d'ordre 2, auquel cas ce produit est égal à x.

Exercice 25 : Centrale 2023

On considère $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ et on définit la matrice :[8]

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \in M_{n^2}(K)$$

On définit également l'application $\varphi_{A,B} : M \longmapsto AMB^{\mathsf{T}}$ et on note $\mathscr{C}_n$ la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Dans cette question, on étudie le cas $n = 2$.

1.a) Écrire une fonction `K(A, B)` qui prend en arguments $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, et renvoie $A \otimes B$.

1.b) Écrire une fonction `Mat(A, B)` qui prend en arguments $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, et renvoie la matrice de $\varphi_{A,B}$ dans la base $\mathscr{C}_2$.

1.c) Tester ces fonctions avec les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comparer les spectres de A et B et de $A \otimes B$. Que peut-on conjecturer ?

2. On étudie à présent le cas général. On admettra que $A \otimes B$ est la matrice dans la base $\mathscr{C}_n$ de $\varphi_{A,B}$.

2.a) Montrer que $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1A_2) \otimes (B_1B_2)$.

2.b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A \otimes B$ soit inversible, et calculer $(A \otimes B)^{-1}$.

2.c) On note $\sim$ la relation de similitude. Montrer que si $A_1 \sim A_2$ et $B_1 \sim B_2$, alors $A_1 \otimes B_1 \sim A_2 \otimes B_2$.

3. Montrer successivement les relations :

(i) $\det(A \otimes B) = (\det AB)^n$;

(ii) $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$;

(iii) $\mathrm{rg}(A \otimes B) = \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{rg}(B)$;

(iv) $A \otimes B \sim B \otimes A$.

[8] La matrice $A \otimes B$ (lire « A tenseur B ») est appelée *produit de Kronecker* de A et B. On peut montrer que dans une base bien choisie du K-espace vectoriel $K^n \otimes K^n$, c'est la matrice du produit tensoriel des applications linéaires associées à A et B.

Exercice 26 : Centrale 2023

Pour $f \in \mathbb{C}$ et $t = (t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on pose :

$$M_f(t) = \begin{pmatrix} t_0 & ft_{n-1} & \cdots & \cdots & ft_1 \\ t_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & ft_n \\ t_{n-1} & \cdots & \cdots & t_1 & t_0 \end{pmatrix}.$$

Pour $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on définit son déterminant de Vandermonde :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_1)^{n-1} & (a_2)^{n-1} & \dots & (a_n)^{n-1} \end{vmatrix}$$

puis on pose $A_f = M_f(0, 1, 0, \dots, 0)$, ainsi que :

$$F_n = \frac{V(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})}{\sqrt{n}} \quad \text{où} \quad \omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right).$$

1. Écrire des fonctions Python `F(n)` et `M(f, t)` qui renvoient respectivement F_n et $M_f(t)$.
2. On pose $P_t = t_{n-1}X^{n-1} + \cdots + t_1X + t_0$. Conjecturer une formule liant $P_t(A_1)$ et $M_1(t)$ avec Python.
3. Montrer que $P_t(A_1) = M_1(t)$. Montrer que F_n est inversible, et que $F_n^{-1} = \overline{F_n}$.
4. Soit D la matrice diagonale de coefficients $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$. Trouver un lien entre D et $F_n A_1 \overline{F_n}$.

Il restait des questions mais l'élève n'a pas eu le temps de poursuivre.

Exercice 27 : Centrale 2023

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ dont l'écriture binaire est donnée par :

$$n = \sum_{k=0}^{p} e_k 2^k$$

puis on pose $s(n) = e_0 + \ldots + e_p$ et $v(n) = \min\{k \in \{0, \dots, p\} \mid e_k \neq 0\}$.

1. Écrire des fonctions `s(n)` et `v(n)` qui renvoient respectivement $s(n)$ et $v(n)$.
2. Montrer que $v(mn) = v(m) + v(n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$.
3. Tester la relation $v(n) = s(n-1) - s(n) + 1$ pour $n \in \{1, \dots, 10000\}$ avec Python, puis la démontrer.
4. Calculer $v(k!)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

   (i) n est une puissance de 2 ;

   (ii) pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est pair.

Exercice 28 : Centrale 2025

Pour $b \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $M_b \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$M_b = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 & b \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & b & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire une fonction Python qui renvoie M_b en fonction de n et b.

2. En testant quelques valeurs de (n, b), montrer que l'on peut conjecturer :

$$\chi_{M_b} = X^n - \sum_{k=1}^{n-1} b^{n-k-1} X^k - b^n.$$

3. Calculer de manière approchée les valeurs propres de M_1 pour $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Les tracer en nuage de points (on pourra utiliser `z.real` et `z.imag` pour obtenir les parties réelle et imaginaire d'un complexe `z`). Que dire du nombre de valeurs propres et du nombre de valeurs propres réelles de M_1 ?

4.a) Calculer $(M_2)^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Observer leurs dernières lignes ; que peut-on conjecturer ?

4.b) Montrer que la famille $(I_n, M_n, (M_n)^2, \ldots, (M_n)^{n-1})$ est libre.

4.c) Montrer que le polynôme minimal de M_n est de degré n.

4.d) Montrer que le commutant de M_n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.[9]

4.e) Montrer que le sous-espace propre associé à toute valeur propre complexe de M_n est une droite.

Exercice 29 : Centrale 2025

1. Écrire une fonction `genere_matrices(n, m, a)` qui renvoie une liste de m matrices de taille n dont les coefficients sont compris entre $-a$ et a.

2. Écrire une fonction `proportion(l)` qui donne la proportion du rang des matrices de la liste `l`. On pourra utiliser `matrix_rank` pour obtenir le rang d'une matrice.

3. Trouver $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$ qui n'est pas une homothétie, et telle que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ soit stable par φ.

4.a) Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $r \in \{1, \ldots, n-1\}$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$AM - K_r B = 0 \quad \text{où} \quad K_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.b) Soit $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{spec}(N)$ pour que N soit nilpotente.

4.c) Soit $P = A^{-1}B$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P - \lambda M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

5. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))$. Montrer que φ préserve le rang si, et seulement si, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est stable par φ.

[9] Le *commutant* d'une matrice M est l'ensemble des matrices qui commutent avec M.

Exercice 30 : Centrale 2026

Pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on définit sous réserve d'existence le *logarithme* de M par :

$$L(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(M - I_n)^k.$$

1.a) Montrer que l'application $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, vérifiant :

$$|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$$

pour toutes matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1.b) Montrer que si $|||M - I_n||| < 1$, alors $L(M)$ est bien défini. En déduire que l'application L est bien définie sur la boule ouverte de centre I_n et de rayon 1.

2.a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - 1| < 1$. Montrer que l'application $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k t^k\right)$$

vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire la valeur de $f(1)$, ainsi que l'égalité :

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k\right) = z.$$

2.b) Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable, et telle que $|||M - I_n||| < 1$. Démontrer :

$$\exp L(M) = M.$$

3) Qu'en est-il si M n'est pas supposée diagonalisable ?

Exercice 31 : Centrale 2026

1. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier l'existence de $\rho(M) = \max_{\lambda \in \mathrm{spec}\, M} |\lambda|$.

2. On fixe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et on définit la suite (X_n) par $X_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et :

$$X_{n+1} = 2X_n - X_n A X_n.$$

Démontrer :

$$\|X_{n+1} - A\| \leq \|A\|\,\|X_n - A\|^2.$$

3. Si (X_n) converge, démontrer que $\rho(AX_0 - I_n) < 1$.

4. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ distincts, et $m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{N}$ de somme n. Montrer que pour $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, il existe une famille $(L_{i,j})$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ telle que :

$$P = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{m_i - 1} P^{(j)}(\lambda_i) L_{i,j}.$$

5. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \geq n$, alors :

$$\left\|M^k\right\| \leq C k^{n-1} \rho(M)^{k-n+1}.$$

6. Conclure quant à la convergence de (X_n).

Exercice 32 : Mines 2022

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on définit l'application :

$$\begin{aligned} u_P : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \mathrm{e}^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n \end{aligned}$$

puis l'application $u : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ définie par $u(P) = u_P$.

1. Montrer que u est à valeurs dans $\mathbb{C}[X]$.[10]
2. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
3. Étudier les éléments propres de u.

Exercice 33 : Mines 2022

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour $x \in E$:

$$N(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\left| \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right|}{\sum_{k=1}^{n} t^{2k-2}}$$

Montrer que N est une norme sur E. Comparer N et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 34 : Mines 2022

Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \det(A + XB) \end{aligned}$$

est polynomiale et donner son degré.

[10] On identifie ici les fonctions polynomiales $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et les polynômes à coefficients complexes, ce qui ne pose pas de problème puisque $\mathbb{C}$ est un corps infini. Cela n'est plus possible lorsque le corps de base est fini ! Par exemple, le polynôme $X^2 + X \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ n'est clairement pas nul, mais sa fonction associée est bien nulle...

Exercice 35 : Mines 2022

1. Soient $n \geq 2$ un entier et $p \in \{0, \dots, n-1\}$. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{où} \quad A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}).$$

1.a) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} g : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{M}_p(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &\longmapsto Y \end{aligned}$$

induit un isomorphisme $\ker(M) \to \ker(D - CA^{-1}B)$.

1.b) Montrer que $\operatorname{rg} M = p$ si, et seulement si, $D = CA^{-1}B$.

2. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On note p le rang maximal des matrices de V. L'objectif est de majorer $\dim V$ en fonction de p.

2.a) Montrer que l'on peut supposer $J_p \in V$, condition que l'on supposera vérifiée pour la suite.[11]

2.b) On définit l'ensemble :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^{\mathsf{T}} & D \end{pmatrix} \;\middle|\; (B, D) \in M_{n-p,p}(\mathbb{R}) \times M_{n-p,n-p}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Étudier $V \cap W$, puis conclure sur la dimension de V.

Exercice 36 : Mines 2022

Trouver une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 - M = I_n$. Montrer qu'alors $\det(M) > 0$.

Exercice 37 : Mines 2022

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ possédant n racines distinctes $a_1, \dots, a_n$. Calculer, sous réserve d'existence :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i P'(a_i)}.$$

[11] La matrice J_p est la matrice de coefficients diagonaux $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ avec exactement p coefficients égaux à 1.

Exercice 38 : Mines 2022

On fixe $P \in \mathbb{C}[X]$ et on pose :

$$A = \{i \in \{0, \dots, n\} \mid a_i \neq 0\} \quad \text{où} \quad P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$

On suppose que $(X-1)^k$ divise P pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et on veut montrer que $\text{card}(A) \geq k+1$.

1. On suppose par l'absurde que $\text{card}(A) \leq k$. On définit la suite de polynômes $(P_s)_{s\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} P_0 = 1, \\ P_{s+1} = X(X-1)\cdots(X-s). \end{cases}$$

Montrer que pour tout $s \in \{0, \dots, k-1\}$:

$$P^{(s)}(1) = \sum_{i \in A} a_i P_s(i).$$

2. En déduire que $a_i = 0$ pour tout $i \in A$. Conclure.

3. Discuter l'optimalité de la minoration obtenue.

Exercice 39 : Mines 2022

Soient E un K-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k.$$

1. Simplifier $v_n \circ (u - \text{id}_E)$.

2. Montrer que $\text{im}(u - \text{id}_E) \cap \ker(u - \text{id}_E) = \{0\}$.

3. On suppose E de dimension finie. Montrer que $E = \text{im}(u - \text{id}_E) \oplus \ker(u - \text{id}_E)$.

4. On suppose à présent que $E = \text{im}(u - \text{id}_E) \oplus \ker(u - \text{id}_E)$, mais on ne suppose plus E de dimension finie. Montrer que la suite (v_n) converge simplement sur $\mathscr{L}(E)$ et que $\text{im}(u - \text{id}_E)$ est un fermé de E.

5. Étudier la réciproque.

Exercice 40 : Mines 2023

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $a_1, \dots, a_r$ les racines de P et $n_1, \dots, n_r$ leurs multiplicités respectives.

1. Montrer que :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{n_k}{X - a_k}.$$

2. Soit a une racine de P'. Montrer qu'il existe $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R}$ tels que :[12]

$$\sum_{k=1}^{r} t_k = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{r} t_k a_k = a.$$

[12] Il apparaît en fait dans la preuve que les t_i sont positifs. On peut donc dire que les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P : c'est le théorème de Gauss-Lucas, formulé par Gauss en 1836 et démontré par Félix Lucas en 1879.

Exercice 41 : Mines 2023

Soit $N \in \mathrm{M}_n(K)$ nilpotente. Montrer que $\exp(N) - I_n$ est nilpotente.

Exercice 42 : Mines 2023

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on définit :

$$\|P\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \quad \text{où} \quad P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k.$$

On considère $b \in \mathbb{C}$ tel que $|b| < 1$, ainsi que l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}[X] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ P &\longmapsto P(b). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue pour la norme $\|\cdot\|$, et déterminer $|||f|||$.
2. Que se passe-t-il dans le cas $|b| \geq 1$?

Exercice 43 : Mines 2023

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} c & a & \cdots & a & a \\ b & c & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c & a \\ b & \cdots & b & b & c \end{pmatrix}$$

Déterminer $\det(A)$ à l'aide du polynôme $P = \det(A + XJ)$, où J est la matrice ne contenant que des 1.

Exercice 44 : Mines 2023

On considère la matrice de $\mathrm{M}_n(K)$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1/n \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & 0 & & \vdots \\ & & 1 & 0 & 1/n \\ & & & 1 & 1/n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que C est diagonalisable sur K si, et seulement si, χ_C est scindé à racines simples sur K.
2. Montrer que C est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 45 : Mines 2023

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^{p+2} = M^2$ et que $\mathrm{tr}(M) = n$. Déterminer M.

Exercice 46 : Mines 2023

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, on note $T(x) = \mathrm{pgcd}(x_1, \dots, x_n)$.

Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) $\det(A) \in \{-1, 1\}$;

(ii) $T(Ax) = T(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$.

Exercice 47 : Mines 2023

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. On considère $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$.

1. Montrer que $\ker u$ est stable par v, et non nul. En déduire que u et v ont un vecteur propre en commun.
2. On suppose désormais que $u \circ v - v \circ u \in \mathrm{vect}(u, v)$. Montrer que u et v sont cotrigonalisables.

Exercice 48 : Mines 2023

Résoudre dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation :

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 49 : Mines 2023

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est :

- *simple* lorsque les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u sont $\{0\}$ et E ;
- *cyclique* lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $E = \{P(u)(x) \mid P \in K[X]\}$.

1. Montrer que si u est simple, alors u est cyclique. Étudier la réciproque.
2. Montrer que si u est simple, alors le commutant de u est $K[u] = \{P(u) \mid P \in K[X]\}$.
3. Montrer que u est simple si, et seulement si, χ_u est irréductible sur K.

Il restait des questions mais l'élève n'a pas eu le temps de poursuivre.

Exercice 50 : Mines 2023

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{A'(k)} \frac{A}{X - k}.$$

2. En déduire qu'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$|P(k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

Exercice 51 : Mines 2024

On considère $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 2A & 3A \end{pmatrix}.$$

Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 52 : Mines 2024

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est une *transvection* lorsque sa matrice dans une certaine base de E est de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$ pour $\lambda \in K$ et deux entiers distincts $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) u est une transvection ;

(ii) $\mathrm{rg}(u - \mathrm{id}_E) = 1$ et $(u - \mathrm{id}_E)^2 = 0$.

Exercice 53 : Mines 2024

1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Trouver une relation entre χ_A et $\chi_{A^{-1}}$.

2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Trouver une relation entre χ_A, χ_{A^2} et χ_{-A}.

Exercice 54 : Mines 2024

On considère $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ainsi que la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Montrer que si A et B sont diagonalisables, alors il en est de même pour la matrice par blocs :

$$C = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}.$$

Exercice 55 : Mines 2024

Soient $P_1, \dots, P_n \in K[X]$ et $a_1, \dots, a_n \in K$. Quel est le rang de la matrice $(P_i(a_j))_{1 \leq i,j \leq n}$?

Exercice 56 : Mines 2024

Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on note $C(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$.[13]

1. Montrer que $C(A)$ est d'intérieur vide.
2. Montrer que $C(A)$ est connexe par arcs.
3. Caractériser les matrices $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $C(A)$ soit borné.
4. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $C(A)$ est fermé.

Il restait probablement des questions ; si tel est le cas, en voici une ou plusieurs qui auraient pu être posées.

5. Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, l'adhérence de $C(A)$ contient 0.

Exercice 57 : Mines 2024

L'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(K)$ diagonalisables sur K forme-t-il un espace vectoriel ?

Cet ensemble est-il convexe ? connexe par arcs ? ouvert ? fermé ? dense dans $\mathrm{M}_n(K)$?

Exercice 58 : Mines 2024

Soient $\alpha \in]0, +\infty[$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle tous les coefficients hors diagonale de la matrice de u appartiennent à l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$.

Exercice 59 : Mines 2024

1. Existe-t-il une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ invariante par conjugaison ?[14]
2. Existe-t-il une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ invariante par conjugaison par une matrice orthogonale ?
3. Même question que la première avec une semi-norme.[15]

Exercice 60 : Mines 2024

On considère $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$. On définit la suite :[16]

$$\begin{cases} x_0 = a \in \mathbb{R}^n, \\ x_{n+1} = x_n + \alpha(b - Ax_n). \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0 et α pour que (x_n) converge.
2. On pose $e_n = A^{-1}b - x_n$. Trouver la constante optimale $C > 0$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|e_{n+1}\| \leq C \|e_n\|.$$

[13] L'ensemble $C(A)$ est appelé *classe de similitude* de A. C'est l'orbite de A pour l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
[14] Une norme N est dite *invariante par conjugaison* lorsque $N(A) = N(P^{-1}AP)$ pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
[15] Une *semi-norme* est une application à valeurs positives, homogène et vérifiant l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire ayant les mêmes hypothèses qu'une norme sans la séparation (on peut avoir $\|x\| = 0$ avec $x \neq 0$). Par exemple, l'intégrale sur $[0, 1]$ de $|f|$, pour $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux (ou simplement Lebesgue-intégrable) est une semi-norme.
[16] La méthode itérative en jeu est connue sous le nom de *méthode de Richardson à pas fixe*.

Exercice 61 : Mines 2024

Soient E un K-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose :

$$G = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ f = f \circ u,\ u^2 \circ f = f,\ \exists p \in \mathbb{N},\ f^{p+1} \circ u = f^p\}.$$

1. Soient $u \in G$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $u^{k+1} \circ f^k = u$.
2. Soient $u, v \in G$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer $u^k \circ f^{k+1} \circ v$ et $v \circ f^{k+1} \circ u^k$.
3. En déduire que G possède au plus un élément.

Exercice 62 : Mines 2024

On note $I = [1, +\infty[$ et on considère les ensembles :

- $E = \{f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}) \mid f \text{ a une limite en } +\infty\}$,
- $F = \{f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}) \mid \exists n \in \mathbb{N},\ \exists P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall t \in I,\ f(t) = P(t)t^{-n}\}$.

1. Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé, et que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 63 : Mines 2025 (et 2026 !)

Il s'agit d'une démonstration alternative du résultat de l'exercice 35.

Soient $n \geq 2$ un entier, $p \in \{0, \dots, n\}$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{rg} M \leq p$ pour toute matrice $M \in V$.

1. Donner un exemple d'un tel sous-espace V de dimension np.
2. Soient $A \in \mathrm{M}_r(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{R}^r$ une colonne, $L \in \mathbb{R}^r$ une ligne et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$M(t) = \begin{pmatrix} A - tI_r & C \\ L & \alpha \end{pmatrix}.$$

Justifier que l'application :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \det M(t) \end{aligned}$$

est polynomiale de degré r. Calculer ses coefficients de degré r et $r-1$.

3. En déduire que $\dim V \leq np$.

Exercice 64 : Mines 2025

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ et $\mu_0, \dots, \mu_{n-1} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ les applications définies, pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, par :

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k(A) A^k.$$

1. On suppose la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ libre. Montrer que les μ_k sont à valeurs réelles.
2. Montrer que les μ_k sont continues.

Exercice 65 : Mines 2025

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Déterminer le rang, le polynôme caractéristique et le spectre de la matrice :

$$M = \left(a^i + a^j\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Exercice 66 : Mines 2025

1. Soient K un corps infini et $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(K)$ telles que $CD = DC$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det (AD - BC).$$

2. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1}C \\ -I_n & -A^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\lambda \in \mathrm{spec}(M)$ si, et seulement s'il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t} x \end{aligned}$$

soit solution de l'équation différentielle $Ay'' + By' + Cy = 0$.

Exercice 67 : Mines 2025

On considère $a, b \in \mathbb{R}$ distincts, et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & & & b \\ & \ddots & \iddots & \\ & \iddots & \ddots & \\ b & & & a \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
2. Mêmes questions avec cette fois $a, b \in \mathbb{C}$.
3. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 68 : Mines 2025

Soient E un K-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que :[17]

$$f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E.$$

1. Montrer que pour tout $P \in K[X]$:

$$f \circ P(g) - P(g) \circ f = P'(g).$$

2. Montrer que la famille $(g^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.
3. Si $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}[X]$, trouver f et g qui conviennent.

[17] On peut déjà remarquer que sous cette condition, E ne peut pas être de dimension finie ; pourquoi ?

Exercice 69 : Mines 2025

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Décrire l'ensemble :

$$F = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid \exists v \in \mathscr{L}(E),\ u + v \in \mathrm{GL}(E) \text{ et } u \circ v = 0\}.$$

Exercice 70 : Mines 2025

Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Soit $x \in E$. Montrer que l'ensemble :

$$I_x = \{P \in K[X] \mid P(f)(x) = 0\}.$$

est un idéal non nul de $K[X]$. On note $\pi_{f,x}$ son générateur unitaire.[18] Comparer les polynômes π_f et $\pi_{f,x}$.

2. On suppose que f est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ respectivement associées à des vecteurs propres $v_1, \ldots, v_r$. On pose $v = v_1 + \ldots + v_r$; montrer que $\pi_f = \pi_{f,v}$.

3.a) Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si la réunion des F_i est égale à E, alors l'un des F_i est égal à E.[19]

Il restait probablement des questions ; si tel est le cas, en voici une ou plusieurs qui auraient pu être posées.

3.b) En déduire qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_{f,x} = \pi_f$.

Exercice 71 : Mines 2026

L'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé est-il ouvert ? fermé ? (autre ?)

Exercice 72 : Mines 2026

1. Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

[18] Le polynôme $\pi_{f,x}$ est appelé *polynôme minimal local* de f en x.

[19] Ce résultat n'est vrai que si le corps K est infini. Par exemple, l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est la réunion de 4 droites.

Exercice 73 : Mines 2026

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On note $S = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\| = 1\}$.

1. Montrer qu'il existe $U \in S$ tel que :
$$\det U = \max_{M \in S} (\det M)$$
puis montrer que U est inversible.

2. Montrer que l'application :
$$\begin{aligned} N : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \max_{A \in S} (\mathrm{tr}(AM)) \end{aligned}$$
définit une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Calculer $N(U^{-1})$. On pourra étudier l'application $t \longmapsto \det((1-t)U + tM)$.

Exercice 74 : X 2022

Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) B est nilpotente et $BA = 0$;

(ii) $\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM} = \chi_{AM+B}$.

Exercice 75 : X 2022

Soit p un nombre premier.

1. Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que si le polynôme obtenu à partir de f en réduisant ses coefficients modulo p est irréductible sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors f est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

2. Soient $h \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On note :

- $A_p(h) = \{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \{0, \dots, h-1\}^n \mid a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 X$ est irréductible sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$;
- P_n l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré n de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

Montrer que, lorsque $n \to \infty$:
$$\frac{\mathrm{card}(A_p(h))}{\mathrm{card}(P_n)} = \frac{h^n}{p^n} + \mathrm{O}\left(\frac{h^{n-1}}{p^{n-1}}\right).$$

Exercice 76 : X 2022

On considère les polynômes :
$$f = \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_i) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \quad \text{et} \quad g = \prod_{i<j} (X - (\alpha_i + \alpha_j))$$
et on suppose que $f \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $b_k > 0$;

(ii) $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathrm{Re}(\alpha_i) < 0$.

Exercice 77 : X 2022

Existe-t-il $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}$?

Exercice 78 : X 2023

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $a, b \in \mathscr{L}(E)$ et on pose $[a,b] = ab - ba$.[20] On suppose que $[a,b] = f \circ v$, où $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathscr{L}(E, \mathbb{C})$ vérifient $v \circ f = 0$.

1. Calculer $\det([a,b])$.

2. Montrer que a et b sont trigonalisables dans une même base.

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 79 : X 2023

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.

1. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
$$|||A||| = \sup_{\substack{\|X\| \leq 1 \\ \|Y\| \leq 1}} |\langle AX, Y\rangle| .$$

3. On considère la matrice $M \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :
$$M = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leq i,j \leq n} .$$

Majorer $|||M|||$ par une constante indépendante de n.

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 80 : X 2025

Pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on définit l'ensemble :
$$R(M) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^2 = M\}.$$

1. Existe-t-il $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $R(M) = \varnothing$?

2. Combien de matrices deux à deux non semblables y a-t-il dans $R(I_n)$?

3. On suppose que M est diagonalisable à valeurs propres deux à deux distinctes. Calculer $\operatorname{card} R(M)$.

4. Si M est diagonalisable et $R(M) \neq \varnothing$, les éléments de $R(M)$ sont-ils diagonalisables ?

5. À quelles conditions l'ensemble $R(-I_n) \cap \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est-il non vide ?

6. Supposons que $M = I_n + N$ où $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente. Montrer que $R(M)$ n'est pas vide, que $R(M)$ contient un élément de la forme $I_n + N'$ avec $N' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, et que c'est le seul de cette forme.

[20] Le vecteur $[a,b]$ est le *commutateur* de a et b. C'est un objet également étudié en théorie des groupes : le *groupe dérivé* d'un groupe G est le sous-groupe de G engendré par ses commutateurs, souvent noté $[G,G]$. Il est lié à la notion de *groupe résoluble*.

Exercice 81 : X 2025

Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ stable par multiplication. On dit qu'une application $\delta : H \to H$ est une *dérivation* sur H lorsqu'elle vérifie :

$$\forall A, B \in H,\ \delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B).$$

1. Soit $C \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \delta\ :\ H &\longrightarrow \mathrm{M}_d(\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto CA - AC \end{aligned}$$

est dérivation sur H, et calculer $\exp\delta$.

2. On considère une dérivation δ sur H ainsi que $h = \exp\delta$. Démontrer :

$$\forall A, B \in H,\ h(AB) = h(A)h(B).$$

On pourra calculer les puissances de δ via la formule du binôme de Newton, puis montrer que l'application suivante est constante égale à AB :

$$\begin{aligned} f\ :\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{M}_d(\mathbb{C}) \\ t &\longmapsto \exp(-t\delta)(\exp(t\delta)(A) \times \exp(t\delta)(B)). \end{aligned}$$

3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $H_\lambda = \ker((\delta - \lambda \mathrm{id}_H)^d)$. Montrer que si $A \in H_\lambda$ et $B \in H_\mu$, alors $AB \in H_{\lambda+\mu}$. Pour ce faire, on pourra étudier l'application :

$$\begin{aligned} g\ :\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{M}_d(\mathbb{C}) \\ t &\longmapsto \exp(t\delta - t(\lambda+\mu)\mathrm{id}_H)(AB). \end{aligned}$$

Exercice 82 : X 2026

Soient $A_1, \ldots, A_p \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) $A_1 + \ldots + A_p \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$;

(ii) $\mathbb{R}^n = \operatorname{im} A_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{im} A_p$.

Exercice 83 : X 2026

On définit le *commutateur* de deux matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ par $[A, B] = AB - BA$.

1. Soient $X, Y, Z \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $[X, [Y, Z]^2] = 0$. Est-il vrai que $[X, [Y, Z]] = 0$?

2. Décrire l'espace vectoriel engendré par les $[X, [Y, Z]]$ pour $X, Y, Z \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

3. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 84 : X 2026

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{rg} M \neq \operatorname{rg} M^2$. Montrer qu'il existe $R \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ vérifiant $RM = MR = R^2 = 0$.

Exercice 85 : ENS ULSR 2022

Soient $A \subseteq \mathbb{R}^d$ une partie bornée, et $x \in \mathbb{R}^d$ situé dans l'enveloppe convexe de A.[21]

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_1, \dots, x_n \in A$ tels que :

$$\left\| x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leq \frac{\delta(A)}{\sqrt{n}} \quad \text{où} \quad \delta(A) = \sup_{x,y \in A} \|x - y\| .$$

Exercice 86 : ENS L 2022

Montrer que, dans tout triangle, on peut inscrire une ellipse tangente au milieu de chaque côté du triangle.

Exercice 87 : ENS ULSR 2023 (corrigé)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $N \geq 1$, scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(N-1)(P')^2 \geq NPP''$. Cas d'égalité ?

Exercice 88 : ENS SR 2023

Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que $M^n = I_2$.

1. Que peut-on dire ?
2. En déduire que l'ordre de M divise 12.

Exercice 89 : ENS SR 2023

Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe, engendré par les matrices :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 90 : ENS L 2023

Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto AM. \end{aligned}$$

1. Montrer que $|||\varphi_A||| \leq |||A|||_2$.
2. Donner une sous-algèbre stricte de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ stable par transposition.
3. On définit la sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; (M_1, M_2) \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_q(\mathbb{R}),\, p+q=n \right\}$$

et on admet que $B = \{\varphi_A \mid A \in \mathcal{M}\}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$.

Décrire l'ensemble des endomorphismes de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec tous les éléments de B.

[21] L'*enveloppe convexe* de A est l'ensemble des barycentres à poids positifs d'éléments de A. C'est également la plus petite partie convexe de $\mathbb{R}^d$ contenant A, ou encore l'intersection des parties convexes de $\mathbb{R}^d$ contenant A.

Exercice 91 : ENS ULSR 2025

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On définit le nombre réel :[22]

$$C(M) = |||A||| \, |||A^{-1}|||$$

où $|||\cdot|||$ est la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Calculer $C(M)$ lorsque $M \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $C(M) \geq 1$.
3. Montrer que $C(M) = C(M^\mathsf{T})$.
4. Que dire de M lorsque $C(M) = 1$?
5. Montrer que si $A, B \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $C(A+B) \leq \max(C(A), C(B))$.

Exercice 92 : ENS L 2025

Soient $F, G \in \mathbb{Q}[X]$. Déterminer des conditions nécessaires pour que $F(\mathbb{Q}) = G(\mathbb{Q})$.

On pourra commencer par supposer $F, G \in \mathbb{Z}[X]$ et montrer que $\deg F = \deg G$.

[22] Le réel $C(M)$ est appelé *conditionnement* de M. Il mesure la difficulté de la résolution numérique d'un système linéaire de la forme $Mx = y$. Si $C(M)$ est élevé, les erreurs d'approximation sur y auront tendance à fortement se propager sur x.

Analyse, topologie

Exercice 93 : CCINP 2023

On considère l'intégrale :

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Existence et valeur de I ?
2. Soit $a \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$. Trouver des réels α et β tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{(1+t^2)(\alpha^2+t^2)} = \frac{\alpha}{1+t^2} + \frac{\beta}{a^2+t^2}.$$

3. Calculer l'intégrale :

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\ln(t)}{(1+t^2)(a^2+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

4. Rappeler le théorème de convergence dominée. L'utiliser pour calculer l'intégrale :

$$\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 94 : CCINP 2023

1. Calculer la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

2. Démontrer :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = 0.$$

3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. À l'aide de la continuité uniforme de f, montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 95 : CCINP 2023

On considère l'intégrale :

$$I = \int_0^\infty \frac{t\sin t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

1. Existence de I ?
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$J(x) = \int_0^x \frac{t\,|\sin t|}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{(u+k\pi)\sin u}{(u+k\pi)^2+1}\,\mathrm{d}u.$$

3. L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

Exercice 96 : CCINP 2023

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = x_0, \\ u_{n+1} = \arctan(u_n). \end{cases}$$

1. Montrer que u est monotone. Déterminer son sens de variation en fonction de x_0.
2. Montrer que u converge et déterminer sa limite.
3. Trouver toutes les fonctions continues $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(\arctan x).$$

Exercice 97 : CCINP 2024

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + \lambda^n x^2}.$$

1. Convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$ en fonction de λ ?
2. Même question pour la convergence uniforme.
3. On définit à présent la fonction :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \quad \text{où} \quad g_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + 2^n x^2\right).$$

Domaine de définition, continuité et dérivabilité de G ?

Exercice 98 : CCINP 2024

Soit $a \in]0, 1[$. On considère l'intégrale :

$$I(a) = \int_0^a \frac{x - \ln(1-x)}{x^2}\ \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $I(a)$ est convergente.
2. Démontrer :

$$I(a) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}.$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x - \ln(1-x)}{x^2}\ \mathrm{d}x.$$

Exercice 99 : CCINP 2025

On admet le résultat :[23]

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Démontrer :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 100 : Centrale 2022

Soient B un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ ainsi que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $u(B) \subseteq B$.

On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, et :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

1. Quels sont les compacts convexes de $\mathbb{R}$?
2. On définit l'ensemble :

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} u_n(B).$$

Montrer que $x \in A$ si, et seulement si, $u(x) = x$ et $x \in B$.

3. Montrer que $A \neq \varnothing$.

[23] C'est le problème de Bâle, posé en 1644 par Pietro Mengoli. D'ailleurs, $\pi^2/6 \approx 1.644$. Étonnant, non ?

Exercice 101 : Centrale 2022

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de chiffres « 1 » dans l'écriture binaire de n. On pose également :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k(k+1)}.$$

1.a) Donner u_{13}, u_{31} et u_{32}. À l'aide de Python, donner une expression de u_n.

1.b) Tracer les 100 premières valeurs de S_n. Que peut-on conjecturer ?

2.a) Montrer que $u_n \leq 1 + \log_2(n)$.

2.b) Montrer que la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2.c) Calculer sa somme S. On pourra d'abord démontrer :

$$S = \frac{S}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

3.a) Quelle est la nature de la série $\sum u_k$?

3.b) On pose, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$v_p = \sum_{k=0}^{2^p-1} u_k.$$

Exprimer v_{p+1} en fonction de v_p. En déduire une expression explicite de v_p.

3.c) Montrer qu'il existe $A, B > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A \log_2(n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} u_k \leq B \log_2(n).$$

3.d) Démontrer, lorsque $n \to \infty$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \frac{n \log_2(n)}{2}.$$

Exercice 102 : Centrale 2022

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :[24]

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

1.a) Écrire une fonction `S(n, x)` qui renvoie la valeur de $S_n(x)$.

1.b) Pour $n \in \{10, 20, 100\}$, tracer S_n sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

1.c) Écrire une fonction `premier_max(n)` qui renvoie l'abscisse du premier maximum local de S_n.

2.a) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin((2n+2)t)}{\sin(t)} \, \mathrm{d}t.$$

2.b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{t^2+1} \, \mathrm{d}t.$$

2.c) En déduire :[25]

$$S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Il restait probablement des questions ; si tel est le cas, en voici une ou plusieurs qui auraient pu être posées.

3.a) Calculer les points critiques de S_n sur $[0, \pi]$.

3.b) On note m_n le plus petit d'entre eux. Montrer que S_n admet un maximum local en m_n.

3.c) Démontrer :

$$m_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t.$$

3.d) On admet que l'intégrale ci-dessus est strictement supérieure à 1. Conclure.

[24] La limite simple de (S_n) est la série de Fourier d'un signal carré d'amplitude 1 et de période 2π.

[25] La formule $\pi = 4 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + \ldots$ est due à Madhava, mathématicien indien (1350–1425). La convergence de cette série alternée est cependant trop lente, et il est plus judicieux de calculer $\arctan(1/\sqrt{3})$ à l'aide de son développement en série entière. Cette méthode a d'ailleurs permis à Madhava de donner l'approximation $\pi \approx 3.14159265359$, avec 11 décimales correctes !

Exercice 103 : Centrale 2023

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que (b_n) décroît et tend vers 0.

1. Montrer qu'une série (réelle ou complexe) absolument convergente est convergente.[26]

2.a) On note $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ et on suppose que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} S_k(b_{k+1} - b_k) + S_n b_n.$$

2.b) En déduire que $\sum a_n b_n$ converge.

3.a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \sin(nx)$. Montrer que si la série de fonctions $\sum b_n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors $b_n = \mathrm{o}(1/n)$.

3.b) Montrer la réciproque.

Exercice 104 : Centrale 2023

On fixe $a \in]0, +\infty[$ et on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(nx)\exp(-n^a).$$

1.a) Rappeler le théorème de dérivation des séries de fonctions.

1.b) Donner le domaine de définition de f. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2. On suppose que $a > 1$ et on fixe $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction :

$$\begin{aligned} \tau_x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(x+t) \end{aligned}$$

est développable en série entière au voisinage de 0.[27]

3. Qu'en est-il lorsque $a \leq 1$?

[26] Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque, cette propriété caractérise la *complétude*, c'est-à-dire la convergence de toute suite de Cauchy. Lorsqu'un espace vectoriel normé est complet pour sa norme, on dit que c'est un *espace de Banach*.

[27] Une fonction développable en série entière au voisinage de tout point est appelée *analytique*, et c'est une propriété beaucoup plus forte que la dérivabilité à tout ordre. La fonction $x \longmapsto \exp(-1/x^2)$ prolongée par 0 en $x = 0$ illustre très bien cette nuance.

Exercice 105 : Centrale 2023

Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est appelée *dérangement* lorsqu'elle n'a pas de point fixe.

Sur Python, on représentera σ par la liste $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

1.a) Écrire une fonction `est_derangement(t)` qui renvoie `True` si la permutation `t` est un dérangement.

1.b) Écrire une fonction `permut(n)` qui renvoie la liste des éléments de S_n (on pourra procéder récursivement). *Remarque : l'ordre des permutations n'est pas imposé. L'entrée `permut(3)` pourra par exemple renvoyer :*

```
[[1;2;3];[3;1;2];[2;3;1];[2;1;3];[1;3;2];[3;2;1]].
```

1.c) Écrire une fonction `nb_derangements(n)` qui renvoie le nombre de dérangements de $\{1, \dots, n\}$.

1.d) On note d_n ce nombre, avec par convention $d_0 = 1$. Démontrer :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

2. On considère à présent la série entière :

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n$$

et on note R son rayon de convergence.

2.a) Montrer que $R \geq 1$. Calculer $D(t)\exp(t)$ pour $t \in]-1, 1[$.

2.b) En déduire :

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

2.c) On note p_n la probabilité de tirer au sort un dérangement de $\mathfrak{S}_n$. Déterminer la limite de (p_n).

3. On note $S_p(n)$ le nombre de surjections $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, p\}$. On fixe $x, y \in \mathbb{C}$ et on pose :

$$S(x, y) = \sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} u_{n,p} \quad \text{où} \quad u_{n,p} = S_p(n) \frac{x^n}{n!} \frac{y^p}{p!}.$$

3.a) Démontrer :

$$p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_k(p).$$

3.b) Montrer que $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, et que :

$$\exp(y) S(x, y) = \exp(x \exp(y)).$$

3.c) En déduire :

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

Que peut-on dire lorsque $p = n$?

Exercice 106 : Centrale 2023

Soit E un espace vectoriel normé. On dit que $A \subseteq E$ est *connexe* s'il n'existe aucun couple de fermés disjoints non vides (F, G) de A tel que $A = F \cup G$.[28]

1. Expliquer pourquoi on peut remplacer « fermés » par « ouverts » dans la définition ci-dessus.

2. Montrer que A est connexe si, et seulement si, toute application continue $A \to \mathbb{N}$ est constante.

3. Montrer que si A est connexe par arcs, alors A est connexe.[29]

4. Quelles sont les parties connexes de $\mathbb{R}$?

5. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. On note $V(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u. Montrer que $V(u)$ est un intervalle.

6. Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. Montrer que $V(u)$ est connexe.

Exercice 107 : Centrale 2023

On considère les séries entières (voir exercice 22 pour la définition de H_n) :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n.$$

1. En utilisant la méthode des rectangles, montrer que $H_n = \ln(n) + \mathrm{O}(1)$ lorsque $n \to \infty$. En déduire les rayons de convergence de f et g.

2. Donner une expression de g et en déduire un équivalent de f en 1^-.

3. En calculant $(1-x)f(x)$, montrer que f admet une limite finie en -1 et la calculer.

Exercice 108 : Centrale 2023

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que les intégrales suivantes convergent :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

2.a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de Γ. Montrer que $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

2.b) Montrer que Γ est l'unique fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ vérifiant :[30]

- $f(1) = 1$,
- $f(x+1) = xf(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$,
- $\ln \circ f$ est convexe.

[28] Cette définition se généralise aux espaces topologiques, et caractérise le fait qu'une partie soit « en un morceau ». Un *espace topologique* est un couple (E, T) où E est un ensemble et T est une *topologie*, c'est-à-dire un ensemble de parties de E stable par réunion quelconque, intersection finie, et contenant $\varnothing$ et E. Les éléments de T sont appelés les *ouverts* de E (tiens, tiens). Dans le cas usuel où E est un espace vectoriel normé, ou simplement un espace métrique, sa topologie est définie par ses boules ouvertes.

[29] La réciproque est fausse en général. Notons G le graphe de la fonction $x \longmapsto \sin(1/x)$ restreinte à $]0, 1]$. On peut montrer, mais c'est loin d'être facile, que son adhérence $\overline{G} = G \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ est connexe, mais n'est pas connexe par arcs. La réciproque est tout de même vraie pour les ouverts des espaces topologiques localement connexes par arcs, comme $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ par exemple.

[30] C'est le théorème de Bohr-Mollerup, démontré en 1922. Le théorème de Wielandt, démontré en 1996, affirme quant à lui que Γ est l'unique fonction holomorphe f définie sur le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$, vérifiant $f(1) = 1$, $f(z+1) = zf(z)$ pour tout z, et bornée dans la bande $\{1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 2\}$.

Exercice 109 : Centrale 2024

Soit $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$.

1. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose :
$$\|P\|_A = \max(|P(a_0)|, \ldots, |P(a_n)|).$$
Montrer que $\|\cdot\|_A$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. On pose :
$$d_n = \min_{P \in \mathbb{R}[X]} \|X^n - P\|_A .$$

2.a) Dans cette question, on prend $A = (0, 1, \ldots, n)$. Écrire une fonction Python qui prend $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ en argument, où $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et renvoie $\|X^n - P\|_A$.

2.b) Calculer d_1 et d_2. On pourra utiliser la fonction `scipy.optimize.fmin`.

3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe un unique $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :
$$X^n - P = \sum_{k=0}^{n} b_k \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (X - a_j) \right)$$
et exprimer les b_k en fonction des données de l'énoncé.

4. Montrer que $b_0 + \ldots + b_n = 1$.

5. Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$:
$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} |a_j - a_k| \geq k!(n-k)!.$$

6. En déduire que $\|X^n - P\|_A \geq 2^{-n} n!$ puis calculer d_n.

Exercice 110 : Centrale 2024

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(x_0, \dots, x_n)$ une famille de réels deux à deux distincts. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $P(x_i) = f(x_i)$, noté $L_n(f)$.

2. On considère les fonctions :
$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2+0.2}$$
et on pose, pour $i \in \{0, \dots, n\}$:
$$a_i = \frac{2i}{n} - 1 \quad \text{et} \quad b_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right).$$
Représenter f et $L_n(f)$ à l'aide de Python, pour les familles $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ et $(b_i)_{0\leq i\leq n}$ et pour $n \in \{5, 10, 20, 50\}$ (on pourra utiliser la fonction `scipy.interpolate.barycentric_interpolate`). Faire de même avec g.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, un entier $p \in \mathbb{N}^*$, des réels $c_0, \dots, c_p \in [a, b]$ deux à deux distincts, et une fonction g dérivable p fois sur $]a, b[$, telle que $g(c_0) = \cdots = g(c_p) = 0$. Montrer que $g^{(p)}$ s'annule sur $]a, b[$.

4. Soient $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ des réels deux à deux distincts, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable. Montrer qu'il existe $\xi_x \in]a, b[$ tel que pour tout $t \in [a, b]$:
$$f(t) - L_n(f)(t) = \frac{1}{(n+1)!} U_n(t) f^{(n+1)}(\xi_x) \quad \text{où} \quad U_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i).$$

5. On pose $h(x) = x(x-1)\cdots(x-n)$. Démontrer :

(i) $\forall s \in [0, n]$, $|h(n-s)| = |h(s)|$;

(ii) $\forall s \in [0, n/2]$, $|h(s-1)| > |h(s)|$;

(iii) $\max\limits_{[0,n]} |h| = \max\limits_{[0,1]} |h| \leq n!$

et en déduire qu'il existe $K > 0$ tel que :
$$\sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)| \leq K \left(\frac{2}{e}\right)^n \quad \text{où} \quad Q = \prod_{i=0}^{n} (X - a_i).$$

7. On définit la suite des polynômes de Tchebychev $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} T_0 = 1, \\ T_1 = X, \\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n. \end{cases}$$
Démontrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

8. Déterminer le degré, le coefficient dominant, ainsi que les racines de T_n.

Il restait probablement des questions ; si tel est le cas, en voici une ou plusieurs qui auraient pu être posées.

9. Pour une subdivision σ de $[a, b]$ comportant $n+1$ points, on note $P_\sigma(f)$ l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f en tout point de σ. Comment minimiser $\|f - P_\sigma(f)\|_\infty$ à l'aide des b_i ?

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 111 : Centrale 2025

Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose :

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Énoncer le théorème de convergence dominée pour une famille quelconque de fonctions.
2. Montrer que F est bien définie sur $[0, +\infty[$ et donner sa limite en $+\infty$.
3. Montrer que F et G sont continues sur $[0, +\infty[$ et qu'elles sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 112 : Centrale 2025

On admet :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$, on pose :

$$g_n(x) = \frac{x^n(1-x)^2}{(1-x^n)^2}.$$

1. Tracer les fonctions g_5, g_{10}, g_{15} et les comparer. Comparer également, sur quelques exemples, la limite de la fonction g_n en 1^- avec $\pi^2/6$. Que conjecturer quant à la convergence normale de $\sum g_n$ sur $]0, 1[$?
2. On pose, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$S_N(x) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{N} \frac{nx^n}{1-x^n}.$$

Calculer $S_{10}(0.9)$, $S_{100}(0.99)$, $S_{1000}(0.999)$, $S_{10000}(0.9999)$ et comparer ces valeurs à $\pi^2/6$.

3. Soient $a_1, \ldots, a_n \in]0, +\infty[$. Comparer les quantités :

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \quad \text{et} \quad (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$$

et démontrer l'affirmation, puis prouver la conjecture réalisée en question 1.

4. On admet que $\zeta(2) = \pi^2/6$ (cf. exercice 99). Montrer que :

$$g(x) = \lim_{N \to \infty} S_N(x)$$

est bien définie sur $]0, 1[$, puis démontrer la conjecture faite en question 2.

5. Démontrer la conjecture faite en question 2.
6. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est positive.
7. Montrer que pour tout $h > 0$, la série $\sum f(nh)$ converge et vérifie :

$$\lim_{h \to 0^+} h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t.$$

8. Redémontrer la conjecture faite en 2 avec les résultats des questions 6 et 7.

Exercice 113 : Centrale 2025

1. On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}$$

et prolongées par 1 en $t = 0$.

Montrer que f est développable en série entière, et que f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que si une fonction h est développable en série entière au voisinage de 0 avec $h(0) \neq 0$, alors $1/h$ est aussi développable en série entière au voisinage de 0.

a) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \left]-r, r\right[,\ \frac{t\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{n!} t^n.$$

b) Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P'_{n+1} = (n+1)P_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 P_{n+1}(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

3. Démontrer le résultat admis en question 2.

Exercice 114 : Centrale 2026

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$U_n(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

1. À l'aide de Python, tracer quelques-unes des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n n U_{2n}(x)$.

2. Établir :

$$|U_n(x)| \leq \mathrm{e}^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3. En déduire la nature de la série $\sum (-1)^n n U_{2n}(x)$.

4. Conjecturer avec Python l'existence d'un réel C tel que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n U_{2n}(x) = C((x+1)\cos x + x \sin x - \mathrm{e}^x).$$

Il restait probablement des questions ; si tel est le cas, en voici une ou plusieurs qui auraient pu être posées.

5. Démontrer la conjecture.

Exercice 115 : Centrale 2026

On définit, pour $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sa *transformée de Laplace* par :

$$\mathcal{L}f(x) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition de $\mathcal{L}f$ et calculer $\mathcal{L}f(x)$ pour les fonctions suivantes :

   (i) $f(t) = \mathrm{e}^{-nt}$ pour $n \in \mathbb{N}$;

   (ii) $f(t) = \sin(\omega t)$ pour $\omega \in \mathbb{R}$.

Vérifier les résultats obtenus avec Python, et calculer les écarts entre valeurs numériques et théoriques.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad T_n = H_n - \ln(n+1)$$

où H_n désigne le n-ème *nombre harmonique* (cf. exercice 22).

2.a) À l'aide de Python, conjecturer le comportement des suites (S_n) et (T_n).

2.b) Montrer que (S_n) et (T_n) convergent vers une même limite $\gamma \in \mathbb{R}$.[31]

2.c) Estimer la valeur de γ avec Python.

3.a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\ \mathrm{d}t.$$

Vérifier à l'aide de Python que $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\gamma$.

3.b) Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3.c) À l'aide des questions précédentes, calculer, pour $x > 0$:

$$\int_0^\infty \ln(t)\mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t.$$

4. En déduire la valeur de $\Gamma'(1)$.

Exercice 116 : Centrale 2026

1. Donner sans démonstration le développement en série entière de arctan et son rayon de convergence.

2. Exprimer sous forme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t.$$

3.a) Calculer la somme de la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3}.$$

3.b) En déduire la valeur de I.

[31] Il s'agit de la *constante d'Euler-Mascheroni*. On ignore aujourd'hui si elle est rationnelle, mais on ne pense pas. Si c'était le cas, le dénominateur de sa forme irréductible devrait en effet avoir plus de 242 080 chiffres...

Exercice 117 : Mines 2022

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{x \sin(x+t)}{1+(xt)^3} \, \mathrm{d}t.$$

Montrer que f possède une limite en $+\infty$. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 118 : Mines 2022

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t) f(2t) \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 119 : Mines 2022

Soit (E) l'équation différentielle $2xy'' + y' - y = 0$.

1. Trouver une solution f de (E), développable en série entière au voisinage de 0, telle que $f(0) = 1$.

2. Donner le rayon de convergence de f et en donner une expression à l'aide des fonctions usuelles (on pourra séparer les cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$).

3. Transformer (E) en posant $y = zf$, puis conclure.

Exercice 120 : Mines 2022

Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose :

$$s(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\mathrm{e}^{xt} - 1} \, \mathrm{d}t.$$

1. Développer s en série de fractions rationnelles.

2. En déduire un équivalent de $s(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 121 : Mines 2022

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha}.$$

Déterminer la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ en fonction de α.

Exercice 122 : Mines 2022

Étudier les solutions de l'équation différentielle $x^3 y' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 123 : Mines 2022

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ n'admettant aucune racine entière. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \ln\left(\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|\right).$$

Exercice 124 : Mines 2022

On considère la fonction :

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Domaine de définition et continuité de F ?
2. Équivalent de F en 0^+ et en $+\infty$?

Exercice 125 : Mines 2022

Montrer que la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants (normalisée).[32]

Exercice 126 : Mines 2022

On considère la fonction :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}.$$

1. Domaine de définition et continuité de f ?
2. Limite en $+\infty$ et équivalent en 0^+ de f ?

Exercice 127 : Mines 2022

On fixe $\alpha \in [0, +\infty[$ et on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Déterminer la limite et un équivalent de u_n lorsque $\alpha = 0$.
2. Faire de même lorsque $\alpha > 1$.
3. À l'aide du changement de variable $x = t\sqrt{n}$, faire de même lorsque $\alpha = 1$.
4. En déduire la limite de u_n lorsque $\alpha \in]0, 1[$.

[32] On qualifie ici de normalisée une équation différentielle en y dans laquelle le coefficient de $y^{(n)}$ est égal à 1.

Exercice 128 : Mines 2023

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty.$$

1. Montrer que $\sum f(n)$ converge.
2. Déterminer un équivalent du reste.
3. Pouvait-on trouver ce résultat par une comparaison série-intégrale ?

Exercice 129 : Mines 2023

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,\pi], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^\pi |\sin(nt)|\, f(t)\ \mathrm{d}t.$$

1. Démontrer :
$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi f\left(\frac{t+k\pi}{n}\right)\sin(t)\ \mathrm{d}t.$$
2. Déterminer la limite de la suite (I_n). On pourra étudier :
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 130 : Mines 2023

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\int_0^x \sqrt{f(t)}\ \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in [c, +\infty[,\ f(x) = (x-c)^2.$$

Exercice 131 : Mines 2023 (et 2025 !)

Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $X' = AX$, où $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique.

1. Montrer que la fonction $\|X\|_2$ est constante.
2. En déduire que la trajectoire de X est inscrite dans un cercle.

Il restait probablement des questions ; si tel est le cas, en voici une ou plusieurs qui auraient pu être posées.

3. Montrer la réciproque de la question 1.

Exercice 132 : Mines 2023

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = f(nx)$. Convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Convergence uniforme sur tout compact ?

2. Mêmes questions avec $g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$.

Exercice 133 : Mines 2023

Soit $b \geq 2$ un entier. Pour $n \geq 2$, on note $c(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture en base b de n.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_n = nu_{c(n)}. \end{cases}$$

Montrer que $\sum 1/u_n$ diverge.

Exercice 134 : Mines 2023

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et on considère $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$:

$$f'(x)^2 \leq 2f(x)M(\alpha) \quad \text{où} \quad M(\alpha) = \sup_{|t|\leq 2\alpha} |f''(t)|.$$

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 135 : Mines 2023

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on pose :

$$f(z) = \exp\left(\frac{z}{1-z}\right).$$

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Donner son rayon de convergence.

2. Exprimer les coefficients a_n de cette série entière sous forme d'une somme.

3. Donner une relation de récurrence entre les a_n.

4. Effectuer un développement asymptotique de $\ln(a_n)$ à la précision $\mathrm{O}(\ln n)$.

Exercice 136 : Mines 2023

Calculer la somme double :

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2n + n^2m + 2mn}.$$

Exercice 137 : Mines 2023

On note $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et on considère $f \in \mathscr{C}^0(D, \mathbb{R})$. On suppose que f admet un prolongement continu sur $D \cup \{z\}$ pour tout $z \in S$. Montrer que f admet un prolongement continu sur $\overline{D}$.

Exercice 138 : Mines 2023

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2. On suppose que $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$, et que $f''(0) \neq 0$. Montrer que $\sqrt{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 139 : Mines 2024

Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Démontrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \ln\left|P\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right| \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 140 : Mines 2024

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 1, \\ (n+2)u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n. \end{cases}$$

Déterminer une expression explicite de u_n et calculer sa limite.

Exercice 141 : Mines 2024

Pour $x \in [0,1]$ et $n \geq 2$, on pose $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution $x_n \in [0,1]$.

2. Déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \to \infty$.

Exercice 142 : Mines 2024

Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_j = \min\left\{ n \geq 1 \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq j \right\}.$$

Justifier que la suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Converge-t-elle ? Démontrer :

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = \mathrm{e}.$$

Exercice 143 : Mines 2024

On note H_n le $n^{\text{ème}}$ nombre harmonique (voir exercice 22), et on admet que $\zeta(2) = \pi^2/6$ (voir exercice 99).

1. Démontrer :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n2^n} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j2^{j-1}} \int_0^1 \frac{x^{j-1}}{2-x} \,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer la valeur explicite de la somme.

Exercice 144 : Mines 2024

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Donner un équivalent, lorsque $n \to \infty$, de :

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

2. Calculer la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k}}.$$

Exercice 145 : Mines 2024

On admet que $\zeta(2) = \pi^2/6$ (cf. exercice 99), et on pose :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Déterminer la limite :

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi^4}{48} - a_n b_n\right).$$

Exercice 146 : Mines 2024

Démontrer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin(2x)}\ \mathrm{d}x < \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 147 : Mines 2024

Étudier la série entière :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \quad \text{où} \quad u_n = \int_0^{\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^2+1}\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 148 : Mines 2025

On considère la série entière :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!(4n-1)} x^{4n-1}.$$

Donner le domaine de définition de f. Montrer qu'elle admet une limite en $+\infty$.

Exercice 149 : Mines 2025

1. Soit $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On pose, pour $x \geq 0$:

$$G(x) = \int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer que si g et G ont une limite finie en $+\infty$, alors celle de g est nulle.

2. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$f(x) \int_0^x f(t)^2\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 150 : Mines 2025

Soit K un fermé de $[0,1]\times[0,1]$. Pour $x\in[0,1]$, on pose :

$$I_x=\{y\in[0,1]\mid (x,y)\in K\}.$$

1. Montrer que I_x est un segment.

2. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,1]$ qui converge vers $\ell\in[0,1]$, et on pose :

$$J_z=\{y-x\mid y\in I_x\}.$$

Montrer que si $\sup J_{u_n}\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors $\sup J_\ell\geq 0$.

3. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} a_0=0,\\ b_0=1,\end{cases}$$

puis par récurrence suivant la valeur de :

$$K_n=(\inf J_{c_n})\times(\sup J_{c_n})\quad\text{où}\quad c_n=\frac{a_n+b_n}{2}$$

comme suit :

- si $K_n=0$, alors $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=b_n$;
- si $K_n>0$, alors $a_{n+1}=c_n$ et $b_{n+1}=b_n$;
- si $K_n<0$, alors $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=c_n$.

Montrer que (a_n) et (b_n) convergent.

Exercice 151 : Mines 2025

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante, de limite nulle, à valeurs strictement positives. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} N:\mathbb{R}_+^*&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto \operatorname{card}\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\geq x\}.\end{aligned}$$

Étudier l'intégrabilité de N sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer son intégrale si elle existe.

Exercice 152 : Mines 2025

Décrire l'ensemble des valeurs prises par :

$$A(f)=\frac{1}{\|f\|_1}\int_0^1 f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

pour $f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)\setminus\{0\}$.

Exercice 153 : Mines 2025

On fixe $x \in]0, \pi/2]$, et on considère l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1 - 2t\cos x + t^2} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I converge et calculer sa valeur.
2. En déduire qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive, décroissante, telle que :

$$\frac{\pi - x}{\sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\cos x)^n.$$

Exercice 154 : Mines 2025

Montrer que la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et non dérivable en 0.

Exercice 155 : Mines 2026

Soit (a_n) une suite de réels telle que :

$$a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

1. Montrer que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Déterminer un équivalent de a_n lorsque $n \to \infty$.

Exercice 156 : Mines 2026

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{1 + 2x + 3x^2}.$$

Trouver une équation différentielle dont f est solution. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 157 : Mines 2026

Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, telle que $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} r > 0$.

1. On pose $a_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2}$, $b_n = r_n(a_n + b_n)$ avec $a_0 = b_0 = 1$. Démontrer :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

2. On pose $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Montrer que :

$$q_{n+1} = 1 + r_n + \frac{r_n}{q_n}.$$

3. On suppose que (q_n) est monotone à partir d'un certain rang. Montrer que (q_n) converge.

4. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \sim Kb_n$ lorsque $n \to \infty$. Démontrer que $K > 0$, et exprimer K en fonction de r.

5. Comment faire sans l'hypothèse de monotonie de la question 3 ?

Exercice 158 : Mines 2026

Soient E un espace vectoriel normé, et K une partie compacte de E. On appelle *isométrie* de K toute fonction $f : K \to K$ telle que :

$$\forall x, y \in K,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1.a) On se place dans $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie, et on définit :

$$A = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f = 1 \right\} \quad \text{et} \quad B = \{f \in E \mid f([0,1]) \subseteq [0,1]\}.$$

Les parties A et B sont-elles compactes ?

1.b) Quelles sont les isométries de $[0,1]$?

2. Montrer qu'une isométrie $K \to K$ est nécessairement surjective.

3. Montrer que si $f : K \to K$ vérifie :

$$\forall x, y \in K,\ \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$$

alors f est une isométrie de K.

Exercice 159 : X 2022

On considère la série entière, de rayon de convergence R :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) $\exists C > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |a_n| \leq (C + \varepsilon)^n$;

(ii) $R = \infty$ et $\exists C > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists r_0 > 0,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geq r_0 \implies |f(z)| \leq \exp((C + \varepsilon)\,|z|)$.

Exercice 160 : X 2022

Soient $a_1, \dots, a_n$, $x_1, \dots, x_n$ des réels non nuls. On pose $f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(x_k t)$ et on suppose :

(i) $\sup_{r\in\mathbb{N}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|f^{(r)}(t)\right| < \infty$;

(ii) $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \leq 1$;

(iii) $f'(0) = 1$.

1. Justifier rapidement que l'on peut supposer $0 < x_1 < \cdots < x_n$, et montrer que $x_n \leq 1$.

2. Démontrer :
$$\frac{f(t)}{t} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}x \quad \text{où} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\,\mathbb{1}_{[-x_k,x_k]}(x).$$

3. On admet que si φ est continue et 2π-périodique, alors :[33]
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(n)|^2 = \int_{-1}^{1} |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad \widehat{\varphi}(n) = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\mathrm{e}^{in\pi x}\,\mathrm{d}x.$$
Démontrer :
$$\int_{-1}^{1} |g(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq 2.$$

4. En déduire que $f = \sin$.

Exercice 161 : X 2022

On considère le nombre rationnel :
$$r = \frac{1}{9899} = 0.000101020305081321 34\dots$$

1. Que vous inspire r ?

2. Formuler une conjecture à l'aide d'une série, puis la démontrer.

3. Que peut-on dire du développement décimal de r ?

4. En déduire une conjecture faisant intervenir la suite de Fibonacci, puis la démontrer.

Exercice 162 : X 2022

On note E l'ensemble des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Pour $f \in E$, on définit l'application $A : E \to E$ par :
$$A(f) : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que A est continue et déterminer sa norme d'opérateur.[34]

[33] C'est une version de l'égalité de Parseval, avec laquelle on peut d'ailleurs calculer les $\zeta(2k)$ pour $k \geq 1$! Pour $k \leq 0$, c'est une autre histoire...

[34] Cette notion n'était pas au programme en 2022, la question avait donc été formulée de la manière suivante : démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|A(f)\|_\infty \leq C\,\|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$, et trouver la constante C optimale.

Exercice 163 : X 2022

Existe-t-il un cercle contenant exactement trois points à coordonnées rationnelles ?

Exercice 164 : X 2022 (corrigé)

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon 1. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ell$.

1. Est-il vrai que $\sum a_n$ est convergente, de somme ℓ ?
2. Montrer que ce résultat est vrai si l'on suppose (a_n) positive.
3. Montrer que ce résultat est vrai si l'on suppose $a_n = \mathrm{o}(1/n)$.[35]

Exercice 165 : X 2022

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $x_n, y_n \in]0,1[$ tels que :

$$n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n+x_n} \quad \text{et} \quad n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1+y_n}.$$

2. Montrer qu'il n'existe aucun $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $a + b\mathrm{e} + c\mathrm{e}^2 = 0$.[36]

Exercice 166 : X 2022

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in]-1,1[$ non nuls et tous distincts, ainsi que $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe une série entière :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

de rayon de convergence ≥ 1, à coefficients entiers, uniformément bornés, et telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ f(\alpha_i) = \beta_i.$$

[35] C'est un corollaire d'un théorème dû à Hardy et Littlewood, démontré en 1914 par les deux mathématiciens du même nom, qui l'ont d'ailleurs utilisé l'année suivante dans une nouvelle démonstration du théorème des nombres premiers. Le résultat reste d'ailleurs vrai si l'on suppose seulement $a_n = \mathrm{O}(1/n)$. Une forme plus générale est le théorème dit taubérien de Hardy-Littlewood.

[36] En fait, e est même *transcendant*, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients rationnels. Ce résultat a été démontré par Charles Hermite en 1873. Le théorème d'Hermite-Lindemann, démontré en 1882 par Ferdinand von Lindemann, affirme plus généralement que si a est un nombre algébrique non nul, alors e^a est transcendant.

Exercice 167 : X 2022

On pose $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On dit que f est *α-höldérienne* lorsque :

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall (s,t) \in [0,1],\ |f(t) - f(s)| \leq C|t-s|^\alpha.$$

1. Soient $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $\alpha \leq \beta$. Montrer que si $f \in E$ est β-höldérienne, alors f est α-höldérienne.

2. Soient $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $0 < \alpha \leq \beta < 1$ et $\alpha + \beta > 1$. On considère $f \in E$ une fonction α-höldérienne et $g \in E$ une fonction β-höldérienne. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n(f,g) = \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right)\left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right).$$

2.a) Montrer que $(I_n(f,g))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On notera $I(f,g)$ sa limite.

2.b) Calculer $I(f,g) + I(g,f)$.

2.c) On suppose f et g de classe $\mathscr{C}^\infty$. Calculer $I(f,g)$.

Exercice 168 : X 2022

Soient $A \subseteq \mathbb{N}^*$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_A(k) \quad \text{et} \quad g(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,\mathbb{1}_A(k).$$

1. Trouver un lien entre les assertions :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{\ln n} = \ell.$$

2. Contre-exemples au résultat de la question 1. ?

Exercice 169 : X 2022

Soit f une fonction développable en série entière de rayon R. Pour $r < R$, on pose :

$$m_r(f) = \sup_{|z|\leq r} |f(z)|.$$

On considère r_1, r_2, r_3 tels que $R > r_1 > r_2 > r_3 > 0$. Montrer qu'il existe des constantes $C > 0$ et $s \in]0,1[$ qui dépendent de r_1, r_2, r_3, mais pas de f, telles que :

$$m_{r_2}(f) \leq C \times m_{r_1}(f)^s \times m_{r_3}(f)^{1-s}.$$

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 170 : X 2023

Soient $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $a \in [0,1]$. On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} x(0) = a \\ x'(t) = g(t) - x(t)(f(t) + g(t)) \end{cases}$$

et on admet qu'elle possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.[37] On suppose enfin que :

$$f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell_f > 0 \quad \text{et} \quad g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell_g > 0.$$

Comportement de $x(t)$ lorsque $t \to +\infty$?

Exercice 171 : X 2023

On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 2a_n + \dfrac{a_{n-1}}{n^2}. \end{cases}$$

Trouver un équivalent de a_n et majorer la constante qui y apparaît.

Exercice 172 : X 2023

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} n a_n = \infty.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k}.$$

1. Montrer que u est bien définie et bornée.
2. Montrer que si u converge, alors sa limite est nulle.
3. Montrer que u converge.

Exercice 173 : X 2023

Soit $a \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée, ne s'annulant pas. Soient $m = \inf|a|$, $M = \sup|a|$, ainsi que $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. On suppose que $M < 1/2$ ou que $m \geq 2$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = 1 + \frac{f(qt)}{a(t)}.$$

[37] Ce point peut être traité à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. Le théorème général, hors-programme, stipule que si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, E est un espace de Banach, et $F : I \times E \to E$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors pour tous $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$, l'équation $x' = F(t,x)$; $x(t_0) = x_0$ admet une unique solution *maximale* (J, x) où J est un intervalle ouvert inclus dans I, c'est-à-dire que x est solution sur J et ne peut être prolongée continûment en dehors. Ici, F est globalement lipschitzienne par rapport à x donc la solution obtenue est en fait *globale*, c'est-à-dire $J = I$.

Exercice 174 : X 2024

Soient $f, g, p \in \mathbb{C}[X]$ avec g et p unitaires. On se donne $q, w \in \mathbb{C}^*$ tels que :

- w^2 n'est pas une puissance entière de q,
- $wf(z)g(zq) - w^{-1}g(z)f(zq) = p(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Trouver une relation entre les degrés.
2. Existence de tels polynômes à p fixé ?
3. Unicité à f et p fixés ?
4. Unicité à g et p fixés ?

Exercice 175 : X 2024

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 6. On suppose qu'il existe une droite $\mathscr{D}$ tangente en trois points distincts A, B, C à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = p(x)$.

1. On note A_1 (resp. A_2) l'aire délimitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ et les points A et B (resp. B et C). Montrer que si B est le milieu de $[AC]$, alors $A_1 = A_2$.
2. On note à présent $Q = \dfrac{A_1}{A_2}$ et $q = \dfrac{AB}{BC}$. Montrer que $\dfrac{2}{7}q^5 \leq Q \leq \dfrac{7}{2}q^5$.

Exercice 176 : X 2025

Soient $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha + \beta > 1$. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(y)| \leq A\,|x - y|^{\alpha} \quad \text{et} \quad |g(x) - g(y)| \leq B\,|x - y|^{\beta}.$$

Étant donné une subdivision $S = (x_0, \ldots, x_n)$ de l'intervalle $[a, b]$, on pose :[38]

$$J_S(f, g) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k)).$$

Démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$|J_S(f, g) - f(a)(g(b) - g(a))| \leq AB \times C^{\alpha} \times \zeta(\alpha + \beta).$$

Que peut-on dire de g lorsque $\beta > 1$?

Exercice 177 : X 2026

On considère $x_0, x_1 > 0$ et on définit (x_n) par :

$$x_{n+1}x_{n-1} = 1 + x_n^2.$$

1. La suite (x_n) est-elle périodique ?
2. Donner un équivalent de x_n lorsque $n \to \infty$.

[38] C'est la construction de l'*intégrale de Riemann-Stieltjes*.

Exercice 178 : ENS SR 2022 (Gourdon, *Analyse*, p. 84)

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right| \in [0,+\infty].$$

1. Donner la formule de Taylor avec reste intégral, et en déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange.

2. On suppose dans toute la suite qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M_0 < \infty$ et $M_n < \infty$.

2.a) Montrer que $M_k < \infty$ pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$.

2.b) Montrer que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

2.c) Démontrer, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$:

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} (M_0)^{1-\frac{k}{n}} (M_n)^{\frac{k}{n}}.$$

Exercice 179 : ENS SR 2022

Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $B : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ continue, et $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = (A + B(t))x(t)$.

1. Rappeler le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

2. Soient $a, u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ et $c \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) \leq c(t) + \int_0^t a(s)u(s)\ \mathrm{d}s.$$

Démontrer :[39]

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) \leq c(t) + \int_0^t c(s)a(s) \exp\left(\int_s^t a(y)\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}s.$$

3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer :[40]

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{(t-s)A}B(s)x(s)\ \mathrm{d}s.$$

4. On suppose que $\mathrm{spec}(A) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$ et on pose :

$$\mathcal{E}^+ = \left\{X \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathrm{e}^{tA}X \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^- = \left\{X \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathrm{e}^{tA}X \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0\right\}.$$

Montrer qu'il existe des projecteurs π^+ et π^-, respectivement sur $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$, qui commutent avec A et qui vérifient $\pi^+ + \pi^- = \mathrm{id}_E$.

5. On suppose que $\mathcal{E}^+ = \mathbb{R}^n$ et que $B(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Montrer que $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

[39] C'est le lemme de Grönwall, extrêmement utile dans l'étude des équations différentielles.
[40] C'est une variante de la formule de Duhamel, qui permet d'exprimer les solutions de $x' = Ax + b$.

Exercice 180 : ENS L 2022

On note E l'ensemble des fonctions 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_t(f)(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta)}{(1-\cos(\theta-\varphi))^{1/2-t}}\,\mathrm{d}\theta.$$

1. Pour quelles valeurs de t cette définition a-t-elle un sens ?

2. Montrer que $I_t \in \mathscr{L}(E)$.

3. Montrer que $I_t : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_2)$ est continue.

Exercice 181 : ENS ULSR 2023

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $x_0, \dots, x_n \in I$ tels que $x_0 < \dots < x_n$ et $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $\tau \in I$ tel que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Exercice 182 : ENS ULSR 2023

Pour $t \in \mathbb{N}$, on pose :

$$N(t) = \operatorname{card}\left\{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; \binom{n}{k} = t\right\} \quad \text{et} \quad B(t) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; t < \binom{2k}{k}\right\}.$$

Montrer que $N(t) \leq 2B(t)$, et que $B(t) = \mathrm{o}(\ln t)$ lorsque $t \to \infty$.

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 183 : ENS L 2023

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$.

1. Soit x une solution non nulle de $y'' + ay' + by = 0$ sur I. Montrer que les zéros de x sont isolés.

2. On suppose que a est de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer l'existence d'une fonction $z : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I telle que $f : t \longmapsto x(t)\mathrm{e}^{z(t)}$ soit solution d'une équation différentielle de la forme $y'' + qy = 0$, où $q \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$.

3. On note E_q l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + qy = 0$ sur I. Soient $q_1, q_2 \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ telles que $q_1 \leq q_2$. On considère $y_1 \in E_{q_1} \setminus \{0\}$ et $y_2 \in E_{q_2} \setminus \{0\}$, ainsi que deux zéros consécutifs α et β de y_1. Montrer que y_2 s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

Exercice 184 : ENS ULSR 2024

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels *presque sous-additive*, c'est-à-dire :

$$\exists c > 0,\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ a_{m+n} \leq a_m + a_n + c.$$

1. Montrer l'égalité :[41]
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m\geq n} \frac{a_m}{m} \right) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

2. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x+1) = F(x) + 1.$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{F^n(x) - x}{n} \quad \text{où} \quad F^n = F \circ \cdots \circ F \ (n \text{ fois})$$

admet une limite, et que celle-ci est indépendante de x.

Exercice 185 : ENS SR 2024

On note $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, et on dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est *positif* lorsque :

$$\forall f \in E,\ (f \geq 0 \implies u(f) \geq 0).$$

On note $\mathscr{L}_+(E)$ l'ensemble des applications linéaires positives sur E.

1. Soit $u \in \mathscr{L}_+(E)$. Démontrer :
$$\forall f \in E,\ |u(f)| \leq u(|f|).$$

2. Soient $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. Démontrer :
$$\exists c > 0,\ \forall x, y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + c(x-y)^2.$$

3. Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, on considère les fonctions :
$$\begin{aligned} p_k\ :\ [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^k \end{aligned}$$
et on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}_+(E)^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_n(p_k))$ converge uniformément vers p_k sur $[0,1]$ pour tout $k \in \{0,1,2\}$. Montrer que si $f \in E$, alors $(u_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4. Lien avec le théorème d'approximation de Weierstrass ?

[41] C'est une version du lemme de Fekete pour les suites presque sous-additives.

Exercice 186 : ENS L 2024

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E, et $\mathcal{P}_f(E)$ l'ensemble de ses parties finies.

On considère la partie de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{V} = \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \mid a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n\}.$$

ainsi que $f(G) = \{G \cap P \mid P \in \mathcal{V}\}$ pour $G \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}^n)$. Déterminer le maximum de l'ensemble :

$$X = \{\operatorname{card} G \mid G \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R}^n),\ f(G) = \mathcal{P}(G)\}.$$

Exercice 187 : ENS ULSR 2025

1. Soit $\ell > 0$. Montrer que la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^\ell \exp\left(ixt + i\frac{t^3}{3}\right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

est de classe $\mathscr{C}^2$.

2. Même question avec $\ell = +\infty$.

Exercice 188 : ENS SR 2025

Soit $a \in]0, +\infty[$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = a^{u_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que u est bien définie.
2. Si $a \geq 1$, à quelle condition sur a la suite u converge-t-elle ?
3. Trouver un lien entre les limites éventuelles de u et la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^y - y^x$.
4. Paramétrer les zéros de f. Si $f(x, y) = 0$, on pourra exprimer x et y en fonction de x/y.
5. Que dire des zéros de f dans $\mathbb{Q}^2$?

Exercice 189 : ENS SR 2026

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $r \geq 0$, on note :

$$\mathscr{C}(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}.$$

On fixe $a \in \mathbb{C}$ et pour $z \in \mathscr{C}(r)$, on pose :

$$I(z, f) = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})re^{i\theta} \, d\theta.$$

1. Calculer $I(a, f)$ pour $f(z) = z^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
2. Calculer $I(a, f)$ pour $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ lorque $a \in \mathbb{C} \setminus \mathscr{C}(r)$.
3. On suppose que f est développable en série entière de rayon infini. Démontrer, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < a$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} I\left(a, z \longmapsto \frac{f(z)}{z-a}\right).$$

4. Montrer que pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $z \in \mathbb{C}$ assez grand :

$$\exp M = I(a, z \longmapsto \mathrm{e}^z (zI_n - M)^{-1}).$$

Exercice 190 : ENS SR 2026

1. Montrer que pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sigma(n)\ln(n)} < \infty.$$

2. Obtenir une majoration de la somme de la série.
3. Montrer que pour tout réel $\alpha \in]-\infty, 2]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^\alpha} = \infty.$$

Exercice 191 : ENS L 2025

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ croissantes, continues à droite, de limite nulle en $-\infty$, de limite 1 en $+\infty$, et pour lesquelles il existe une suite de réels $(b_n)_{n\geq 1}$ telle que $f(x)^n = f(x + b_n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 192 : ENS L 2025

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit l'ensemble :

$$D = \{2^k \ell + 2^k [0,1] \mid k, \ell \in \mathbb{Z}\}$$

et on pose, pour $I \in D$:

$$m_I(f) = \frac{1}{|I|} \int_I f(x) \, \mathrm{d}x$$

où $|I|$ désigne la longueur de l'intervalle I.[42] On définit enfin :

$$\|f\| = \sup_{I \in D} \int_I |f - m_I(f)| \, .$$

Montrer que si $J \in D$ et $I \subseteq J$, alors pour tout $I \in P$:

$$|m_I(f) - m_J(f)| \leq 2n \, \|f\| \quad \text{où} \quad |J| = 2^n \, |I| \, .$$

Exercice 193 : ENS L 2025

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $[0,1] \to]0,1]$ qui converge simplement vers f.

1. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$g_n(x) = \frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(x)}{i}$$

converge simplement vers f.

2. On suppose que les f_n sont toutes dérivables, croissantes, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n' \geq \frac{n f_n}{\sigma_n} \quad \text{avec} \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_k.$$

On suppose de plus dans cette question que :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\sigma_n \left(\frac{1}{2} \right) \right] < \infty.$$

Montrer que pour tout $x \in [0, 1/2[$, il existe $c_x \in \mathbb{R}$ à expliciter, tel qu'à partir d'un certain rang :

$$f_n(x) \leq \exp(-c_x n).$$

3. On ne fait plus l'hypothèse précédente sur σ_n. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1]$ tel que :

- si $x < x_0$, alors il existe $c_{x_0} \in \mathbb{R}$ tel qu'à partir d'un certain rang, $f_n(x) \leq \exp(-c_{x_0} n)$;
- si $x > x_0$, alors $f_n(x) \geq x - x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[42] En toute rigueur, c'est sa *mesure de Lebesgue*.

Exercice 194 : ENS L 2026

On définit la fonction *logarithme intégral* par, pour $x \in]1, +\infty[$:

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer qu'il n'existe aucune fonction $u : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

(i) $u(0) > 2$;

(ii) $\forall t \geq 0,\ u(t) > 1$;

(iii) $\forall t \geq 0,\ u'(t) = u(t)\,\mathrm{Li}(u(t))$.

Exercice 195 : ENS U 2022

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et bornées telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{f(x-1) + f(x+1) + f(x-\pi) + f(x+\pi)}{4}.$$

Exercice 196 : ENS U 2023

On note B l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées, et on considère $g \in B$ à support compact.[43]

Caractériser les $t \in \mathbb{R}$ tels que l'adhérence du sous-espace :

$$W(g) = \operatorname*{vect}_{n\in\mathbb{Z}}(x \longmapsto g(x-n)).$$

de l'espace vectoriel normé $(B, \|\cdot\|_\infty)$ soit invariante par translation par t.

[43] Le *support* d'une fonction $f : E \to F$ est l'adhérence de l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}$. Par conséquent, une fonction continue est à support compact si et seulement si elle est nulle en dehors d'un compact.

Calcul différentiel

Exercice 197 : Centrale 2023

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\longmapsto \frac{x}{x^2+t^2}. \end{aligned}$$

1. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^2$ et calculer Δg.

2. On considère à présent la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(x,t)\mathrm{e}^{it}\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie $f'' - f = 0$.

3. En déduire une expression de f.

Exercice 198 : Centrale 2024

On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $[-1,1]$, et on pose :

$$\alpha = \sup_{A\in\mathcal{M}} \det(A).$$

1. Montrer que $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.

2. Montrer que α est bien défini et est un maximum.

3. Montrer que α est atteint en une matrice M vérifiant $\det M > 0$ et à coefficients dans $\{-1,1\}$.

Exercice 199 : Centrale 2026

Soient $A \in \mathrm{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$. On note α (resp. β) la plus petite (resp. grande) valeur propre de A, et on définit la fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\mathsf{T} A x + b^\mathsf{T} x.$$

On définit la suite (x_n) par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^d \\ x_{n+1} = x_n - \gamma \nabla f(x_n) \end{cases}$$

avec $\gamma \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Établir l'égalité $\nabla f(x) = Ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

2. Écrire une fonction Python qui prend en argument A, b et x et renvoie $f(x)$ et $\nabla f(x)$. L'utiliser avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Écrire une fonction Python qui renvoie le n-ème terme de la suite (x_n).

4. Démontrer :

$$\forall M > 0,\ \exists R > 0,\ \|x\| \geq R \implies f(x) \geq M.$$

5. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$, noté x^*. Donner sa valeur.

6. Montrer que $x_{n+1} - x^* = (I_d - \gamma A)(x_n - x^*)$.

7. Montrer que $\|x_{n+1} - x^*\| \leq k \|x_n - x^*\|$ où l'on explicitera la constante k en fonction de γ, α et β. Trouver une condition suffisante sur γ pour que la suite (x_n) converge.

8. Que se passe-t-il avec $\gamma = 1/\beta$?

Exercice 200 : Mines 2023

Déterminer le plus grand $k \in \mathbb{N}$ tel que la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

soit de classe $\mathscr{C}^k$ mais pas $\mathscr{C}^{k+1}$.

Exercice 201 : Mines 2023

Existence, continuité et extrema de la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \int_0^\infty \frac{\sin(t + x)}{t + y}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Exercice 202 : Mines 2023

1. Montrer que $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que sa différentielle en I_n est l'application trace.
2. Montrer que sa différentielle en $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est l'application :

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ H &\longmapsto \operatorname{tr}\left(\operatorname{com}(X)^{\mathsf{T}} H\right). \end{aligned}$$

3. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer qu'il existe un unique prolongement continu sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de l'application :

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ X &\longmapsto \det(X) X^{-1}. \end{aligned}$$

5. On considère $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \det(At + B)$. Démontrer :

$$f'(0) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \Delta_{i,j} b_{i,j}$$

où $\Delta_{i,j}$ désigne le cofacteur[44] d'indice (i, j) de A.

Exercice 203 : Mines 2024

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \frac{1}{2}(\sin(x + y), \cos(x - y)). \end{aligned}$$

1. Déterminer la différentielle de f.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|\mathrm{d}f(x, y)\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. En déduire que le système suivant admet au plus une solution :

$$\begin{cases} 2x = \sin(x + y), \\ 2y = \cos(x - y). \end{cases}$$

Exercice 204 : Mines 2024

On définit la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \min\left(x^2, y^2\right). \end{aligned}$$

Domaine de continuité de f ? Différentiabilité ? Caractère $\mathscr{C}^1$?

[44] Le *cofacteur* d'indice (i, j) d'une matrice A est le coefficient (i, j) de sa comatrice, c'est-à-dire $(-1)^{i+j} \det(D_{i,j})$, où $D_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, la comatrice de A décrit d'ailleurs l'interaction de A avec le produit vectoriel : pour tous vecteurs u et v, $Au \wedge Av = (\operatorname{com} A)(u \wedge v)$.

Exercice 205 : Mines 2024

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$. On fixe également $R > 0$, et on pose :

$$m = \min_{x \in B} \|\nabla f(x)\|$$

où B désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon R.

1. Montrer que f est lipschitzienne sur B.
2. Pour $r \in [0, R]$, on pose :
$$\alpha(r) = \max_{x \in B} f(x).$$
Montrer que α est bien définie et qu'elle est lipschitzienne sur $[0, R]$.
3. Soit $r_0 \in [0, R[$. Démontrer :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall r \in]r_0, r_0 + \delta],\ \frac{\alpha(r) - \alpha(r_0)}{r - r_0} \geq m(1 - \varepsilon).$$
4. Montrer que $\alpha(r) \geq mr + f(0)$.

Exercice 206 : Mines 2025

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable, telle que :[45]

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in [0, +\infty[,\ f(tx) = t^k f(x).$$

Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{d}f(x)(x) = kf(x).$$

Étudier la réciproque.

Exercice 207 : Mines 2025

On note $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de dimension n :

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}.$$

1. Soit $a \in \mathbb{S}^n$. Déterminer l'espace tangent à $\mathbb{S}^n$ en a.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$. On considère $a \in \mathbb{S}^n$ tel que :
$$f(a) = \max_{x \in \mathbb{S}^n} f(x)$$
Montrer que $\nabla f(a)$ est colinéaire à a.

[45] Une telle fonction est dite *homogène* de degré k.

Exercice 208 : Mines 2025

Montrer que la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A^2 \end{aligned}$$

est bijective, puis que sa différentielle est bijective.

Exercice 209 : ENS ULSR 2022

1. Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que si $\Delta u \geq 0$, alors la restriction de u à la boule unité atteint son maximum sur la sphère unité S.

2. Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application déterminant de Vandermonde (cf. exercice 26). Montrer que V atteint son maximum sur $S \cap H$, où H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ à déterminer.

Exercice 210 : ENS SR 2022

Soit $\star$ une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$ faisant de $(\mathbb{R}, \star)$ un groupe, de neutre noté e.

On note également f cette application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \star y. \end{aligned}$$

1. Rappeler la définition de la différentielle d'une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\partial_2 f(x \star y, e) = \partial_2 f(x, y) \partial_2 f(y, e).$$

3. Soit $\varphi : (\mathbb{R}, \star) \to (\mathbb{R}, +)$ un morphisme de groupes. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \int_e^x \frac{1}{\partial_2 f(t, e)} \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 211 : ENS ULSR 2025

L'objectif est de résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y'' + \mu(1 - y^2)y' + y = 0$$

sur $\mathbb{R}$, où $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé.

1. Résoudre (E) lorsque $\mu = 0$.

2. Déterminer les solutions de (E) de la forme $y(t) = x(\omega(\mu)t, \mu)$, où $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, vérifiant l'hypothèse suivante : il existe deux fonctions bornées $x_0, x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi que $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que, lorsque $\mu \to 0$:

- $x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \varepsilon(\tau, \mu)$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$,
- $\omega(\mu) = 1 + \omega_1 \mu + \mathrm{O}(\mu^2)$ avec $\omega_1 \in \mathbb{R}$,
- $\varepsilon(\tau, \mu) = \mathrm{O}(\mu^2)$,
- $\partial_1 \varepsilon(\tau, \mu) = \mathrm{O}(\mu^2)$,
- $\partial_{1,1} \varepsilon(\tau, \mu) = \mathrm{O}(\mu^2)$.

Exercice 212 : ENS U 2025

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\operatorname{spec}\left(\nabla^2 f(x)\right) \subseteq [\ell, L]$$

où $\ell, L \in \mathbb{R}$ sont tels que $0 < \ell \leq L$. On fixe $\tau \in]0, 2/L[$ et on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :[46]

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^d, \\ u_{n+1} = u_n - \tau \nabla f(u_n). \end{cases}$$

Montrer que (u_n) converge.

[46] La méthode en jeu est une forme de *descente de gradient*.

Groupes, anneaux, arithmétique

Tous les anneaux seront supposés unitaires, c'est-à-dire contenant un élément neutre pour la multiplication.

Exercice 213 : Centrale 2022

Soit A un anneau, dont on note 1_A l'élément neutre pour la multiplication.

1.a) Montrer que l'unique morphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \to A$ est donné par :

$$\begin{aligned} f_A : \mathbb{Z} &\longrightarrow A \\ k &\longmapsto k \cdot 1_A. \end{aligned}$$

1.b) Montrer qu'il existe un unique $\kappa_A \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f_A) = \kappa_A \mathbb{Z}$.[47]

2.a) Montrer que si A est un corps, alors $\kappa_A = 0$ ou κ_A est un nombre premier.

2.b) Montrer que si A est un corps fini, alors $\kappa_A \neq 0$.

3.a) On suppose que A est un corps fini, noté K, de cardinal p^n où p est un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$.[48]

Montrer que l'application :[49]

$$\begin{aligned} F : K &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto x^p \end{aligned}$$

est un automorphisme de corps de K.

3.b) Déterminer l'ordre de F dans le groupe des automorphismes de K.

Exercice 214 : Centrale 2023 (*Oraux X-ENS, Algèbre 1*, Cassini)

On définit la *fonction de Möbius* par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré parfait strictement supérieur à 1} \\ (-1)^{\omega(n)} & \text{sinon, où } \omega(n) \text{ est le nombre de facteurs premiers distincts de } n \end{cases}$$

et on donne la *formule du crible de Poincaré*, stipulant que pour des ensembles finis $V_1, \dots, V_k$:

$$\operatorname{card}(V_1 \cup \cdots \cup V_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} \operatorname{card}(V_{i_1} \cap \cdots \cap V_{i_j}) \right).$$

1. Montrer la formule du crible pour $k = 2$. Que donne-t-elle pour $k = 3$?

2. On admet la formule du crible pour tout $k \in \mathbb{N}$. On munit $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ de la probabilité uniforme et on y tire un couple (a, b) au hasard. On note r_n la probabilité que $a \wedge b = 1$. Exprimer r_n en fonction de μ.

3. Montrer que (r_n) converge, calculer sa limite et interpréter le résultat.[50]

---

[47] Cet entier est appelé la *caractéristique* de A. Le résultat de la question 2.a) reste vrai lorsque A est seulement supposé intègre.

[48] On peut construire un corps de cardinal $q = p^n$ en quotientant $\mathbb{F}_p[X]$ par l'idéal engendré par un polynôme irréductible de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré n ou bien en considérant le corps de décomposition de $X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$. Réciproquement, si K est un corps fini de cardinal q, alors $q = p^n$ où p désigne la caractéristique de K, et $n = \dim_{\mathbb{F}_p}(K)$. Deux corps finis de même cardinal sont isomorphes.

[49] C'est l'*endomorphisme de Frobenius*, qui se trouve être un automorphisme puisque K est un corps fini. Il est toujours injectif en tant que morphisme de corps, mais n'est surjectif que lorsque K est *parfait*, c'est-à-dire que toutes ses extensions finies sont séparables (c'est le cas des corps finis, de ceux dont la caractéristique est nulle, mais pas de $\mathbb{F}_p(X)$ par exemple).

[50] Ce résultat se généralise à n'importe quel nombre d'entiers et fait intervenir la légendaire fonction zêta de Riemann.

Exercice 215 : Centrale 2023

Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $A^a = I_n$, $B^b = I_n$ et $AB = BA$.

On note G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ engendré par les matrices A et B.

1.a) Montrer que G est fini.

1.b) Écrire une fonction `comp(A, B)` qui renvoie 1 si $A = B$ et 0 sinon. Écrire une fonction `nonrep` prenant en argument une liste de matrices et éliminant ses doublons.

1.c) Écrire une fonction `card(A, a, B, b)` qui renvoie le cardinal de G.

2. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On admet dans un premier temps que $A^6 = I_4$, $B^4 = I_4$ et $AB = BA$.

2.a) Quel est le cardinal de G ?

2.b) Soient $M, N, P, Q \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Démontrer (cf. exercice 25 pour la définition du produit tensoriel) :

$$(M \otimes N)(P \otimes Q) = (MP) \otimes (NQ).$$

2.c) En déduire que $A^6 = I_4$, $B^4 = I_4$ et $AB = BA$.

3.a) Montrer qu'il existe un morphisme de groupes $\psi : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \to G$ tel que :

$$\psi(1,0) = A \quad \text{et} \quad \psi(0,1) = B.$$

3.b) Montrer que ψ est un isomorphisme.[51]

Il restait probablement des questions ; si tel est le cas, en voici une ou plusieurs qui auraient pu être posées.

4. Généraliser le résultat à un nombre quelconque de matrices d'ordre fini qui commutent deux à deux.

[51] On peut s'en convaincre en écrivant une présentation du groupe G. En effet, $G = \langle x, y \mid x^a = y^b = 1,\, xy = yx \rangle$ correspond à l'abélianisé du produit libre $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} = \langle x, y \mid x^a = y^b = 1 \rangle$, c'est donc la somme directe $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, c'est-à-dire le produit.

Exercice 216 : Centrale 2023

On désigne par $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant.

1. Écrire une fonction Python renvoyant p_n en fonction de n.

2. On admet dans un premier temps la proposition $(\mathcal{P})$:

$$P \in \mathbb{Z}[X] \implies P(X+Y)P(X-Y) \in \mathbb{Z}[X, Y^2].$$

On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suit :

$$\begin{cases} P_1 = X^2 - 2, \\ P_n = P_{n-1}\left(X - \sqrt{p_n}\right) \times P_{n-1}\left(X + \sqrt{p_n}\right). \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ et $P_n\left(\sqrt{p_1} + \cdots + \sqrt{p_n}\right) = 0$.

3. Écrire une fonction Python renvoyant P_n en fonction de n.

4. Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $k < \ell$. Montrer que :

$$(X-Y)^k(X+Y)^\ell + (X-Y)^\ell(X+Y)^k \in \mathbb{Z}[X, Y^2].$$

En déduire la proposition $(\mathcal{P})$.

5. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres complexes annulés par un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$.[52]

5.a) Démontrer :

$$\forall P \in \mathbb{Z}[X],\ \exists Q, R \in \mathbb{Z}[X],\ P = Q(X^2) + XR(X^2).$$

5.b) Montrer que si $a \in \mathcal{A}$, alors $a^2 \in \mathcal{A}$.

Exercice 217 : Centrale 2024

1.a) Énoncer le théorème de Gauss dans $\mathbb{Z}$, ainsi que le petit théorème de Fermat.

1.b) Rappeler la définition d'un idéal d'un anneau commutatif. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, l'ensemble :

$$a\mathbb{Z}[X] = \{aP \mid P \in \mathbb{Z}[X]\}$$

est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.

1.c) Soient A un anneau commutatif et $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que $pA = \{pa \mid a \in A\}$ est un idéal de A, puis :

$$\forall x, y \in A,\ (x+y)^p - (x^p + y^p) \in pA.$$

2. Soit p un nombre premier.

2.a) Soient A un anneau commutatif, I un idéal de A ainsi que $M, N \in \mathrm{M}_n(A)$. On suppose que tous les coefficients de N appartiennent à I. Montrer que $\det(M+N) - \det(M) \in I$.

2.b) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $P(X^p) - P(X)^p \in p\mathbb{Z}[X]$.

2.c) Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{tr}(M^p) \equiv \mathrm{tr}(M) \pmod{p}$.

[52] Ces complexes sont appelés *entiers algébriques*. On peut montrer qu'ils forment un anneau commutatif intègre, et même un sous-anneau du corps des *nombres algébriques*, qui sont les complexes annulés par un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 218 : Centrale 2025

1. Écrire une fonction Python récursive `euclide(u, v)` qui renvoie le PGCD de u et v.

2. Écrire une fonction `compte(u, v)` qui compte le nombre d'appels à la fonction `euclide`.

3. Tracer le nombre d'appels moyens à la fonction `euclide` pour $u < v$ et $v \in \{2, \dots, 2000\}$.

4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha < \beta$. On pose $u_0 = \alpha$, $v_0 = \beta$, et pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \neq 0$:

$$v_{n+1} = u_n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = v_n \bmod u_n.$$

Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = 0$.

5. On pose à présent, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_0 = \frac{\alpha}{\beta} \quad ; \quad a_n = \left\lfloor \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}} \right\rfloor \quad ; \quad x_n = \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}} - a_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

6. On définit la suite de fonctions $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par :

$$\varphi_0 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_p(t_1, \dots, t_p) = \frac{1}{t_1 + \varphi_{p-1}(t_2, \dots, t_p)}.$$

et la suite de fonctions $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par :

$$K_0 = 1, \quad K_1(t_1) = t_1 \quad \text{et} \quad K_p(t_1, \dots, t_p) = t_1 K_{p-1}(t_2, \dots, t_p) + K_{p-2}(t_3, \dots, t_p).$$

Démontrer l'égalité, pour $t_1, \dots, t_p > 0$:

$$\varphi_p(t_1, \dots, t_p) = \frac{K_{p-1}(t_2, \dots, t_p)}{K_p(t_1, \dots, t_p)}.$$

7. Démontrer, pour $n \in \{p, \dots, N\}$:

$$\varphi_p(a_{n+p-1}, a_{n+p-2}, \dots, a_{n-1}, x_n + a_n) = x_{n-p}.$$

8. On admet que si $t_1, \dots, t_p > 0$, alors $K_p(t_1, \dots, t_p)$ et $K_{p-1}(t_2, \dots, t_p)$ sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. On note $d = \text{pgcd}(\alpha, \beta)$. Montrer que :

$$\alpha = dK_{N-1}(a_2, \dots, a_{N-1}) \quad \text{et} \quad \beta = dK_N(a_1, \dots, a_{N-1}).$$

9. Montrer que si `euclide(u, v)` nécessite n appels, alors $v > F_{n-1}$, où $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci.

10. En déduire que le nombre d'appels à `euclide(u, v)` est supérieur à :

$$A = \frac{\ln\left(\dfrac{1 + v\sqrt{5}}{2}\right)}{\ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)}.$$

Exercice 219 : Centrale 2026

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un anneau.[53]

2. Soit $S \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une partie dont tous les éléments sont d'ordre fini et à coefficients dans $\mathbb{Z}[i]$. Montrer que l'ensemble $\{\chi_A \mid A \in S\}$ est fini. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall A \in S,\ A^k = I_n.$$

3. Déterminer les ordres possibles des éléments d'ordre fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Exercice 220 : Mines 2022

Trouver tous les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x + y \equiv 4 \pmod{11}$ et $xy \equiv 10 \pmod{11}$.

Exercice 221 : Mines 2023

On note $K = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$. Montrer que K est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel dont $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une base, puis que K est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 222 : Mines 2024

Soient G et G' deux groupes, et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Montrer que f est surjectif si, et seulement si, l'image par f de toute partie génératrice de G est génératrice de G'.

Exercice 223 : X 2022

Soit A un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est un *diviseur de zéro* lorsqu'il existe $b \in A \setminus \{0\}$ tel que $ab = 0$.

1. Montrer que si A est fini et sans diviseur de zéro, alors A est un corps.

2. Soit $f \in A[X] \setminus \{0\}$. Montrer que si f est un diviseur de zéro, alors il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $af = 0$.

Exercice 224 : X 2023

Quelles sont les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui maximisent $\sigma(1)\sigma(2) + \sigma(2)\sigma(3) + \cdots + \sigma(n-1)\sigma(n) + \sigma(n)\sigma(1)$?

Exercice 225 : X 2023 (Perrin, *Cours d'algèbre*, p. 30)

On considère $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et on note $Z(\sigma) = \{\tau \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma\}$.

1. Montrer que $Z(\sigma)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ et que $Z(\varphi(\sigma)) = \varphi(Z(\sigma))$ pour tout $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$.

2. On suppose que σ est un produit de k transpositions à supports disjoints. Calculer $\mathrm{card}(Z(\sigma))$.

3. On suppose que $n \neq 6$ et on considère $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. Montrer que si τ est une transposition, alors $\varphi(\tau)$ est également une transposition.

4. En déduire que tout automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ est intérieur[54] lorsque $n \neq 6$.[55]

[53] Il s'agit de l'anneau des *entiers de Gauss*. C'est un anneau euclidien, donc factoriel ! L'étude de son arithmétique permet de démontrer le théorème des deux carrés de Fermat, qui caractérise les entiers sommes de deux carrés.

[54] Dans un groupe G, un automorphisme f est appelé *intérieur* lorsqu'il existe $g \in G$ tel que $f(x) = gxg^{-1}$ pour tout $x \in G$.

[55] Lorsque $n = 6$, il existe un automorphisme dit « exceptionnel » et $[\mathrm{Aut}\,\mathfrak{S}_6 : \mathrm{Int}\,\mathfrak{S}_6] = 2$.

Exercice 226 : ENS ULSR 2022

Montrer que les morphismes de groupes continus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 227 : ENS ULSR 2022

On considère le sous-groupe de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \;\middle|\; (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Si B est un sous-groupe de G, on définit :

$$C(B) = \{g^{-1}Bg \mid g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\} \cap G.$$

Montrer qu'il existe un unique sous-groupe non trivial H de G tel que $C(H) = H$.

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 228 : ENS L 2022

Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Pour $a_0, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$d(a_0, \ldots, a_{p-1}) = \prod_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{j=0}^{p-1} a_j \zeta^{jk} \right) \quad \text{où} \quad \zeta = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right).$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\zeta] = \{P(\zeta) \mid P \in \mathbb{Z}[X]\}$ est un anneau.
2. Étudier l'application N définie sur $\mathbb{Z}^p$ par :

$$N(a_0, \ldots, a_{p-1}) = \prod_{k=1}^{p-1} \left(\sum_{j=0}^{p-1} a_j \zeta^{jk} \right).$$

3. Soit $x \in \mathbb{Z}[\zeta]$. Montrer que $x \in \mathbb{Z}[\zeta]^\times$ si, et seulement si, $N(x) = 1$.
4. On admet que pour tout $M \in \mathbb{Z}[X]$:

$$\frac{M(X) - M(1)}{X - 1} \in \mathbb{Z}[X].$$

Montrer que l'équation suivante, d'inconnue $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{Z}^p$:

$$d(a_0, \ldots, a_{p-1}) = a_0 + \cdots + a_{p-1}$$

possède une infinité de solutions.

Exercice 229 : ENS L 2022

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à n. L'objectif est de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier $n \geq 2$[56] :

$$\pi(n) \leq C \frac{n}{\ln n}.$$

Déterminer un encadrement de la forme :

$$f(\pi(n)) \leq \mathrm{rad}(n!) \leq g(n)$$

avec $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, où $\mathrm{rad}(n)$ désigne le produit des diviseurs premiers de n.[57] Conclure.

Exercice 230 : ENS L 2023

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On considère le réseau :

$$L = v_1\mathbb{Z} + v_2\mathbb{Z}$$

où $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ sont deux vecteurs non colinéaires, et on note $\mathrm{vol}(L) = \det(v_1, v_2)$.

1. Soit B une boule d'aire strictement supérieure à $\mathrm{vol}(L)$. Montrer qu'il existe $x, y \in B$ tels que $x - y \in L$.
2. Démontrer :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists I \in L,\ \|I\|_2 \leq 2(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{\mathrm{vol}(L)}{\pi}}.$$
3. Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$. Montrer que -1 est un carré modulo p.[58]
4. Montrer que p est somme de deux carrés.

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

[56] Le *théorème des nombres premiers*, démontré par Hadamard et De La Vallée Poussin en 1896, affirme que $\pi(n)$ est en fait équivalent à $n / \ln n$ lorsque $n \to \infty$. Leur démonstration utilisait principalement de l'analyse complexe, notamment le fait que $\zeta(1 + it)$ ne s'annule jamais. On retrouve cet argument dans bon nombre de preuves modernes. Une preuve « élémentaire » (mais bien loin d'être évidente !), c'est-à-dire n'utilisant pas d'analyse complexe, a vu le jour grâce à Erdös et Selberg en 1949.

[57] La fonction rad est appelée *radical*. Il se trouve que dans $\mathbb{Z}$, le radical de l'idéal engendré par n est l'idéal engendré par le radical de n. Cette fonction n'est donc pas totalement nommée au hasard !

[58] Si p est impair, alors la réciproque est vraie. Ce résultat est également utile dans la démonstration du théorème des deux carrés reposant sur l'étude de l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$.

Probabilités

Exercice 231 : CCINP 2024

1. Soit X une variable aléatoire entière. Montrer que sa fonction génératrice G_X définie par :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

est bien définie sur $]-1, 1[$.

2. Soient X_1, X_2 des variables aléatoires entières indépendantes. Montrer que $G_{X_1+X_2} = G_{X_1} + G_{X_2}$:

   a) par un produit de Cauchy,

   b) par la formule $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

3. On admet que le résultat de la question 2. se généralise à un nombre quelconque $n \geq 2$ de variables aléatoires entières indépendantes. On considère une urne qui contient 4 boules : l'une avec le numéro 0, deux avec le 1, et une avec le 2. On y réalise n tirages avec remise, et on note X_k la variable aléatoire entière prenant la valeur sur la boule au $k^{\text{ème}}$ tirage, ainsi que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer G_{S_n} puis donner la loi de S_n.

Exercice 232 : Centrale 2023

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2. En déduire une majoration de la probabilité d'obtenir au moins 3/4 de « face » au cours de N lancers d'une pièce équilibrée.

3. Soit X une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leq \mathrm{e}^{\mu y(t)}\left(1 - \mu + \mu \mathrm{e}^{y(t)}\right) \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{a}{a-b} \quad \text{et} \quad y(t) = t(b-a).$$

Exercice 233 : Centrale 2023

Soit $A = (X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ où les $X_{i,j}$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes.

1. Écrire une fonction Python `A(n)` qui renvoie la matrice A, si les $X_{i,j}$ suivent une loi de Rademacher.[59]

2. On admet que $D = \det(A)$ est une variable aléatoire. Conjecturer les valeurs de $\mathbb{E}(D)$ et $\mathbb{V}(D)$ en fonction de n, et vérifier cela pour $n = 1$ et $n = 2$.

3. Montrer que $\mathbb{E}(D) = \det\left(\mathbb{E}(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\right)$.

4. Calculer $\mathbb{E}(\chi_A(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$.

5. Déterminer $\mathbb{V}(D)$. On pourra démontrer, pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$:

$$\operatorname{cov}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\ ;\ \prod_{i=1}^{n} X_{\tau(i),i}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \tau, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Démontrer l'*inégalité de Hadamard* :

$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} \|C_i\|_2 .$$

où C_i désigne la $i^{\text{ème}}$ colonne de A. En déduire que $D \leq n^{n/2}$.

7. En déduire une majoration de $\mathbb{P}\left(D \leq n!\sqrt{n}\right)$.

Exercice 234 : Mines 2022

Une urne contient a boules blanches et b boules rouges. Chaque fois qu'on pioche une boule, on la remet dans l'urne et on y rajoute c boules de la même couleur. On note Y le premier instant où l'on tire une boule rouge. Déterminer la loi de Y. La variable Y admet-elle une espérance ?

Exercice 235 : Mines 2022

On considère une urne composée de a boules blanches et b boules noires. On en tire successivement et sans remise toutes les boules, et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage de la dernière boule blanche.

1. Montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\binom{n-1}{a-1}}{\binom{a+b}{a}}.$$

3. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

[59] On dit que X suit une *loi de Rademacher* lorsque $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$, en référence au mathématicien du même nom. Un théorème portant son nom énonce qu'une fonction lipschitzienne est presque partout dérivable.

Exercice 236 : Mines 2022

On considère une urne contenant n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n. On tire une poignée de boules, on replace cette poignée dans l'urne et on mélange, puis on tire une deuxième poignée. Déterminer la probabilité que les deux poignées n'aient aucune boule en commun.

Exercice 237 : Mines 2022

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, chacune suivant une loi géométrique de paramètre $1/n$.

1. Pour $x \in]0, +\infty[$, calculer la limite :
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leq x\right).$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On définit, pour $p \in \mathbb{N}^*$:
$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=np+1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}$$
$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{np} f\left(\frac{k}{n}\right)\exp\left(-\frac{k-1}{n}\right)$$
$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{np} f\left(\frac{k}{n}\right)\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1} - \exp\left(-\frac{k-1}{n}\right)\right]$$

Démontrer les assertions :
$$|a_n| \leq \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-p} \quad ; \quad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^p f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad |c_n| \leq \frac{p^2}{2n}\|f\|_\infty.$$

3. En déduire :
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right] = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 238 : Mines 2022

On considère une urne contenant n jetons, numérotés de 1 à n. On en tire m simultanément, et on les trie par ordre croissant des numéros. Soit X_i la variable aléatoire qui correspond au numéro du $i^{\text{ème}}$ jeton. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i.

Exercice 239 : Mines 2022

Deux urnes contiennent respectivement 2 boules blanches (urne 1) et α boules noires (urne 2). À chaque étape, on prélève une boule dans l'urne 1 et une boule dans l'urne 2, et on échange leurs places. Calculer l'espérance du nombre de boules blanches dans l'urne 1.

Exercice 240 : Mines 2022

Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}_+)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$p_n = \int_0^1 t^n f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définisse une distribution de probabilité.

L'hypothèse « f de classe $\mathscr{C}^1$ » est-elle nécessaire ?

Exercice 241 : Mines 2023

On considère un graphe aléatoire $G = (V, E)$ défini comme suit. On suppose que $n = |V| \geq 2$, on fixe $p_n \in]0,1[$ et on ajoute une arête entre deux sommets distincts de G selon une loi de Bernoulli de paramètre p_n.

1. Combien d'éléments l'ensemble E peut-il avoir au maximum ?

2. Pour $x \in V$, on appelle *degré* de x et on note $\deg(x)$ la variable aléatoire correspondant au nombre d'arêtes de G dont x est une extrémité. Déterminer sa loi.

3. On dit que $x \in V$ est *isolé* lorsque $\deg(x) = 0$, et on note Z_n la variable aléatoire correspondant au nombre de sommets isolés de G. Montrer que :
$$\mathbb{E}(Z_n) = n(1-p)^{n-1}.$$

4. Démontrer :
$$\mathbb{P}(Z_n = 0) \leq \frac{\mathbb{V}(Z_n)}{\mathbb{E}(Z_n)^2}.$$

5. On suppose à présent qu'il existe $C > 0$ tel que :
$$p_n = C\,\frac{\ln n}{n}.$$
Déterminer un développement asymptotique de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque $n \to \infty$.

6. Déterminer un développement asymptotique de $\mathbb{P}(Z_n > 0)$. On distinguera les cas $C > 1$ et $C < 1$.[60]

Exercice 242 : Mines 2023

Dans un sac se trouvent n boules noires et b boules blanches. On les tire une à une sans remise, et on note X le rang de la dernière boule blanche tirée. Déterminer la loi, l'espérance, et la variance de X.

Exercice 243 : Mines 2023

On considère une urne contenant quatre jetons : 0, 1, 1, 2. On tire n jetons avec remise, et on note S la valeur totale obtenue. Déterminer la fonction génératrice de S et en déduire sa loi, son espérance et sa variance.

Exercice 244 : Mines 2023

Soit X une variable aléatoire entière de fonction génératrice $G_X(t) = \alpha \exp\left(1 + t^2\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Trouver α et déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

2. Calculer $\mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N})$, $\mathbb{P}(X \in 3\mathbb{N})$ et $\mathbb{P}(X \in 6\mathbb{N})$.

[60] Le théorème double-exponentiel, dû à Erdös et Rényi, assure que si $np_n = \ln n + c + \mathrm{o}(1)$ lorsque $n \to \infty$, alors la probabilité que G soit connexe tend vers $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-c}}$. De plus, (Z_n) converge alors en loi vers une loi de Poisson de paramètre e^{-c}.

Exercice 245 : Mines 2023

Toutes les variables aléatoires introduites dans cet exercice sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On dit que Y est *k-divisible* lorsqu'il existe des variables aléatoires $X_1, \dots, X_k$ i.i.d. telles que :

$$Y = X_1 + \cdots + X_k.$$

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Déterminer la loi de $U + V$ lorsque $U \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $V \sim \mathcal{P}(\mu)$.

En déduire que si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors Y est k-divisible pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Soit $Y = X_1 + \cdots + X_k$ une variable aléatoire k-divisible.

2.a) Soit $A \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(-A \leq Y \leq A) = 1$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$:

$$\mathbb{P}\left(-\frac{A}{n} \leq X_i \leq \frac{A}{n}\right) = 1$$

2.b) Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$:

$$\mathbb{V}(X_i) \leq \frac{A^2}{n^2}.$$

En déduire une majoration de $\mathbb{V}(Y)$.

2.c) Quelles sont les variables aléatoires bornées et infiniment divisibles ?

3. On suppose que $Y \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$. Montrer que Y n'est pas k-divisible pour $k \geq 2$.

4. On suppose que $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$. Déterminer les $k \in \mathbb{N}$ tels que Y soit k-divisible.

Exercice 246 : Mines 2024

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ainsi que $x \in [a, b]$. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_{n,x})_{n\in\mathbb{N}}$ qui possèdent moment d'ordre 2 et qui ont toutes pour espérance x, et on définit les suites de fonctions (E_n) et (V_n) par :

$$E_n(x) = \mathbb{E}(f(X_{n,x})) \quad \text{et} \quad V_n(x) = \mathbb{V}(X_{n,x}).$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (V_n) pour que (E_n) converge uniformément vers f.

Exercice 247 : Mines 2025

Soient $p \in [0, 1]$ et une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k\geq 1}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que $p = 1/2$ si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(S_{2n} = k).$$

Exercice 248 : ENS L 2022

1. Donner l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

2. Une boîte contient n cartes. Un collectionneur en tire une et la remet dans la boîte, et ainsi de suite jusqu'à toutes les avoir tirées. Calculer l'espérance du nombre de tirages.

Exercice 249 : ENS L 2022

On tire des vecteurs aléatoirement avec remise dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^n$ et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaire pour en obtenir une famille génératrice. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 250 : ENS SR 2023

On munit $\mathfrak{S}_n$ de la loi uniforme. On tire au sort $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et on note :

- A_i l'événement $(\sigma(i) = i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$;
- N la variable aléatoire qui compte le nombre de points fixes de σ.

1. Exprimer $\mathbb{P}(A)$ pour $A \subseteq \mathfrak{S}_n$.
2. Pour $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$.
3. On admet la formule du crible (voir exercice 214). Calculer $\mathbb{P}(N > 0)$.
4. Calculer le nombre de *dérangements* (voir exercice 105) de $\{1, \dots, n\}$.
5. Calculer $\mathbb{P}(N = k)$. Que peut-on dire lorsque $n \to \infty$?

Exercice 251 : ENS ULSR 2023

On considère deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[1, 2]$ et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, 1]$. On se donne également une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles indépendantes, telles que :

$$\mathbb{P}(X_k = a_k) = \mathbb{P}(X_k = -a_k) = \frac{p_k}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_k = 0) = 1 - p_k.$$

1. À quelle condition sur a_k et p_k a-t-on $\mathbb{V}(X_k) = 1$? On la supposera vérifiée par la suite.
2. On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

Démontrer :

$$\mathbb{E}\left[\cos(tS_N)\right] = \prod_{k=1}^{N} \mathbb{E}\left[\cos\left(\frac{tX_k}{\sqrt{N}}\right)\right].$$

3. En déduire :[61]

$$\mathbb{E}\left[\cos(tS_N)\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Exercice 252 : ENS ULSR 2025

On définit la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $S_0 = k \in \mathbb{Z}$ et[62] :

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = S_n + 1) = \mathbb{P}(S_{n+1} = S_n - 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.
2. Pour $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$, calculer la loi de S_n sachant $(S_1 = k_1, \dots, S_m = k_m)$.
3. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, N\}$. On décrète que la marche (S_n) s'arrête lorsqu'on atteint 0 ou N, et on admet qu'elle s'arrête presque sûrement. Calculer la probabilité qu'elle s'arrête en 0.

[61] C'est exactement le théorème central limite exprimé à l'aide des fonctions caractéristiques ! L'exercice en reproduit la preuve dans un cas particulier. Pour démontrer le cas général, il faut faire appel au théorème de Lévy sur l'inversion de Fourier.

[62] Il s'agit de la *marche aléatoire symétrique* sur $\mathbb{Z}$! C'est une *chaîne de Markov* que l'on peut facilement généraliser à $\mathbb{Z}^d$. Elle est *récurrente* (c'est-à-dire que l'on repasse presque sûrement par tous les états) uniquement lorsque $d \leq 2$. Lorsque $d \geq 3$, on peut montrer que (S_n) s'en va presque sûrement vers l'infini (et au-delà).

Exercice 253 : ENS ULSR 2025

Soit $p \in]0,1[$.

1. Donner la définition, la série génératrice et l'espérance de la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

2. Montrer que la loi $\mathcal{G}(p)$ est sans mémoire.

3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de $Y = X_1 + \ldots + X_n$.

4. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{c_0}{k}(1-p)^k \quad \text{où} \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

Déterminer c_0 et calculer la série génératrice de Z.

5. On considère une variable aléatoire N de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et une suite $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires i.i.d. toutes indépendantes de N. On note $R = Z_0 + \ldots + Z_N$. Trouver λ et p tels que R suive la même loi que Y.

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 254 : ENS ULSR 2026

Soient $X_0, \ldots, X_{n-1}$ des variables aléatoires. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $i \neq j$:

$$\mathbb{E}\left(|X_i - X_j|^p\right) \leq \left(\frac{|i-j|}{n}\right)^2.$$

1. Déterminer une borne supérieure pour la quantité :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n-1} |X_i - X_0| \geq t\right)$$

et trouver $t \in \mathbb{R}$ qui permet d'optimiser cette borne.

2. Soit $f : \{0, \ldots, n-1\} \to \mathbb{R}$. On note $t_{j,k} = j2^k$ pour $j, k \in \mathbb{N}$. Démontrer :

$$\max_{0\leq i\leq n-1} |f(i) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \max_{0\leq j\leq 2^{n-k-1}} |f(t_{2j+1,k}) - f(t_{2j,k})|.$$

Exercice 255 : ENS U 2022

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que XY suive une loi de Poisson. Montrer que X ou Y est à valeurs dans $\{0,1\}$.

Exercice 256 : ENS U 2022

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe des réels $\sigma_0, \ldots, \sigma_n > 0$ tels que, pour toutes variables aléatoires indépendantes $A_0, \ldots, A_n$ vérifiant, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$:

$$\mathbb{P}(A_i = 0) = 0 \quad ; \quad \mathbb{E}(A_i) = 0 \quad ; \quad \mathbb{V}(A_i) = \sigma_i^2$$

la probabilité que $P_n = A_0 + A_1 X + \cdots + A_n X^n$ ait n racines réelles soit supérieure ou égale à $1 - \varepsilon$.

Indications

Cette section contient des indications fournies dans certains exercices ou certaines questions difficiles, qui sont parfois apparues au cours de l'échange avec l'examinateur pour les oraux qui s'y prêtent.

Exercice 12

Montrer que la composante connexe par arcs de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ dans G est un sous-groupe distingué de G.[63]

Dans le cas où G est connexe par arcs et $G \neq \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\}$, montrer que G contient une rotation d'angle π.

Exercice 78

Chercher un vecteur propre commun à a et b.

Exercice 79

Pour la question 3, étant donnés $X = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $Y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on pourra considérer :

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} x_k \mathrm{e}^{ikt} \quad \text{et} \quad Q(t) = \sum_{k=0}^{n} y_k \mathrm{e}^{ikt}.$$

Exercice 110

Pour la question 4, on pourra poser $g(t) = f(t) - L_n(f)(t) - CU_n(t)$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 169

Prendre $r_2 < (r_1)^s (r_3)^{1-s}$.

Exercice 182

Montrer que les fonctions $i \longmapsto \binom{i+j}{i}$ et $j \longmapsto \binom{i+j}{j}$ sont strictement croissantes.

Exercice 227

Déterminer d'abord $C(M)$ lorsque M est un singleton. Pour ce faire, écrire les relations entre coefficients et racines du polynôme caractéristique, et montrer que $C(\{A\}) = C(\{B\})$ si, et seulement si, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Exercice 230

Pour la question 4, on pourra choisir L tel que $\|I\|_2^2 = p$ pour tout $I \in L$.

On pourra également prendre $v_1 = (p, 0)$ et $v_2 = (q, 1)$ où $q^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Exercice 253

Pour la question 5, on pourra montrer que $G_R = G_N \circ G_Z$.[64]

[63] On rappelle qu'un sous-groupe H de G est dit *distingué* lorsque $gHg^{-1} \subseteq H$ pour tout $g \in G$.
[64] Cette formule est connue sous le nom d'identité de Wald.

Corrigés

Exercice 13 (corrigé proposé par Vivien)

Lemme. Pour toute base orthonormée $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$:

$$\sum_{k=1}^{n} \exp\langle Ax_k, x_k\rangle \leq \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^A\right).$$

Démonstration. On note tout d'abord $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A. D'après le théorème spectral, il existe alors $Q \in \mathrm{O}(n)$ telle que :

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} Q^{\mathsf{T}}$$

où l'on a noté $\alpha_i = \dim\ker(A - \lambda_i I_n)$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$. La matrice du projecteur spectral associé est :

$$P_i = Q \begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{\alpha_i} & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q^{\mathsf{T}}.$$

De plus, par construction, on dispose des égalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{r} P_i = Q^{\mathsf{T}}Q = I_n \quad ; \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i = A \quad ; \quad P_i P_j = \delta_{i,j} P_i.$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur unitaire, on a donc :

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle P_i x, x\rangle$$

et puisque les P_i sont symétriques positives, chaque $\langle P_i x, x\rangle$ est positif. De plus :

$$\sum_{i=1}^{n} \langle P_i x, x\rangle = 1$$

donc par l'inégalité de Jensen appliquée à l'exponentielle :

$$\exp\langle Ax, x\rangle \leq \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} \langle P_i x, x\rangle.$$

Ainsi, si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \exp\langle Ax_k, x_k\rangle \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} \langle P_i x_k, x_k\rangle = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \langle P_i x_k, x_k\rangle}_{=\mathrm{tr}(P_i)=\alpha_i}.$$

On en conclut, comme annoncé :

$$\sum_{k=1}^{n} \exp\langle Ax_k, x_k\rangle \leq \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathrm{e}^{\lambda_i} \leq \mathrm{tr}\left(\exp A\right). \qquad \square$$

Soient $A, B \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $t \in [0,1]$. Notons $M(t) = tA + (1-t)B$. Puisque c'est une matrice symétrique réelle, il existe une base orthonormée $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $M(t)$, chaque x_i étant associé à la valeur propre λ_i. Remarquons alors que :

$$tAx_i + (1-t)Bx_i = \lambda_i x_i$$

ce qui entraîne :

$$t\left\langle Ax_i, x_i\right\rangle + (1-t)\left\langle Bx_i, x_i\right\rangle = \lambda_i.$$

Ainsi, par convexité de l'exponentielle :

$$\operatorname{tr} M(t) = \sum_{i=1}^{n} \exp(t\left\langle Ax_i, x_i\right\rangle + (1-t)\left\langle Bx_i, x_i\right\rangle) \leq t\sum_{i=1}^{n} \exp\left\langle Ax_i, x_i\right\rangle + (1-t)\sum_{i=1}^{n} \exp\left\langle Bx_i, x_i\right\rangle.$$

D'après le lemme, on en déduit :

$$\operatorname{tr} M(t) = \operatorname{tr}\left(\exp\left(tA + (1-t)B\right)\right) \leq t\operatorname{tr}\left(\exp A\right) + (1-t)\operatorname{tr}\left(\exp B\right)$$

et ceci traduit la convexité de $M \longmapsto \operatorname{tr}\left(\exp M\right)$ sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. □

Exercice 87 (corrigé proposé par Giovanni)

Cet exercice, que j'ai eu à l'oral, n'est pas bien compliqué, mais il est facile de s'y perdre. La clé est d'utiliser la formule bien connue pour P'/P. Comme P est scindé et de degré $N \geq 1$, on peut l'écrire :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et les α_i sont les racines distinctes de P. On obtient alors les équivalences :

$$(N-1)(P')^2 \geq NPP'' \iff (N-1)\left(\frac{P'}{P}\right)^2 \geq N\frac{P''}{P} \iff -N\left(\frac{P'}{P}\right)' \geq \left(\frac{P'}{P}\right)^2.$$

On utilise alors la formule bien connue :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X - \alpha_i}$$

et il ne reste plus qu'à l'injecter dans l'inégalité précédente. Le résultat à prouver est donc équivalent à :

$$N \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(X-\alpha_i)^2} \geq \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X - \alpha_i}\right)^2.$$

Chaque m_i étant positif, on peut définir, pour $i \in \{1, \ldots, r\}$:

$$a_i = \frac{\sqrt{m_i}}{X - \alpha_i} \quad \text{et} \quad b_i = \sqrt{m_i}$$

et puisque la somme des m_i vaut $N = \deg P$, le résultat à prouver équivaut à :

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{r} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{r} a_i b_i\right)^2$$

ce qui découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Étudions le cas d'égalité. Si $x \in \mathbb{R}$, alors $(N-1)P'(x)^2 = NP(x)P''(x)$ si, et seulement si, les vecteurs :

$$a(x) = (a_1(x), \ldots, a_r(x)) \quad \text{et} \quad b = (b_1, \ldots, b_r)$$

sont positivement liés. Puisque $N = \deg P \geq 1$, ils ne sont pas nuls, donc il y a égalité si, et seulement, s'il existe $t_0(x) > 0$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$:

$$x - \alpha_i = \frac{1}{t_0(x)}.$$

On a donc égalité si, et seulement si, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, r\}$:

$$x - \alpha_i = x - \alpha_j.$$

Par conséquent, le cas d'égalité correspond au cas où P a exactement une seule racine. □

Exercice 164 (corrigé proposé par Giovanni)

1. Non, prendre par exemple $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$.

2. Si (a_n) est positive, alors f est croissante, donc l'existence de ℓ permet d'affirmer que f est majorée par ℓ, au voisinage de 1^-, et même sur $[0,1[$. Ainsi :

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq f(x) \leq \ell.$$

Puisqu'on a tronqué la somme, on peut maintenant faire tendre x vers 1^- et on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} a_n \leq \ell.$$

Comme (a_n) est positive, on en déduit que $\sum a_n$ converge. C'est presque terminé. De nouveau par positivité de (a_n), la série $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[0,1]$. Donc f est continue en 1, puis $f(1) = \ell$.

3. Il suffit de montrer que :

$$f\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Tout d'abord, pour $N \geq 1$:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)^n \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} n\,|a_n| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

d'après le lemme de Cesàro. On doit donc montrer que :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Rappelons que $\sum a_n z^n$ est de rayon 1, donc $\sum n a_n z^n$ également, ce qui justifie la majoration :

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty} n\,|a_n| \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

puisque la somme démarre à $n = N+1 \geq N$. Puisque la suite $(n\,|a_n|)$ est majorée, on a donc :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n\,|a_n| \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \leq \frac{1}{N}\left(\sup_{n>N} n\,|a_n|\right)\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = \left(\sup_{n>N} n\,|a_n|\right)\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N+2}.$$

On déduit aisément du fait que $n\,|a_n| \to 0$ le résultat suivant :

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{n>N} n\,|a_n|\right) = 0.$$

Enfin, par inégalité triangulaire :

$$\left|f\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} a_n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right|$$

ce qui donne le résultat cherché puisque f a une limite en 1. □