Nombres constructibles à la règle et au compas

Giovanni Lebaron
ENS Rennes

Club de maths de Marseille
Luminy – 22 juin 2024

Table des matières

1. L'ensemble des nombres constructibles
   - Premières définitions
   - Constructions élémentaires
   - Structure algébrique
2. Le théorème de Wantzel
   - Notion de polynôme minimal
   - Un résultat crucial
   - Résolution des trois problèmes
3. Le théorème de Gauss-Wantzel
   - Angles et polygones constructibles
   - Caractérisation des polygones réguliers constructibles
4. Et si on changeait un peu les règles ?

Quelques grands problèmes de géométrie de l'Antiquité :

Quelques grands problèmes de géométrie de l'Antiquité :

- Quadrature du cercle

Quelques grands problèmes de géométrie de l'Antiquité :

- Quadrature du cercle
- Duplication du cube

Quelques grands problèmes de géométrie de l'Antiquité :

- Quadrature du cercle
- Duplication du cube
- Trisection de l'angle

Quelques grands problèmes de géométrie de l'Antiquité :

- Quadrature du cercle
- Duplication du cube
- Trisection de l'angle
- Construction des polygones réguliers

Quelques grands problèmes de géométrie de l'Antiquité :

- Quadrature du cercle
- Duplication du cube
- Trisection de l'angle
- Construction des polygones réguliers

Résolus au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, soit plus de 2000 ans après.

L'ensemble des nombres constructibles

Premières définitions

On se donne un ensemble fini $\mathcal{B}$ de points du plan, appelés *points de base*.

On se donne un ensemble fini $\mathcal{B}$ de points du plan, appelés *points de base*.

À partir de ces points, on s'autorise à construire :

On se donne un ensemble fini $\mathcal{B}$ de points du plan, appelés *points de base*.

À partir de ces points, on s'autorise à construire :

- la droite passant par deux points distincts de $\mathcal{B}$,

On se donne un ensemble fini $\mathcal{B}$ de points du plan, appelés *points de base*.

À partir de ces points, on s'autorise à construire :

- la droite passant par deux points distincts de $\mathcal{B}$,
- le cercle ayant pour centre un point de $\mathcal{B}$, et pour rayon la distance qui sépare deux points de $\mathcal{B}$.

On se donne un ensemble fini $\mathcal{B}$ de points du plan, appelés *points de base*.

À partir de ces points, on s'autorise à construire :

- la droite passant par deux points distincts de $\mathcal{B}$,
- le cercle ayant pour centre un point de $\mathcal{B}$, et pour rayon la distance qui sépare deux points de $\mathcal{B}$.

Les intersections entre ces objets forment de nouveaux points, et on peut alors répéter ces procédés en réutilisant les points déjà construits.

On se donne un ensemble fini $\mathcal{B}$ de points du plan, appelés *points de base*.

À partir de ces points, on s'autorise à construire :

- la droite passant par deux points distincts de $\mathcal{B}$,
- le cercle ayant pour centre un point de $\mathcal{B}$, et pour rayon la distance qui sépare deux points de $\mathcal{B}$.

Les intersections entre ces objets forment de nouveaux points, et on peut alors répéter ces procédés en réutilisant les points déjà construits.

Les points/droites/cercles ainsi créés seront dits **constructibles (à la règle non graduée et au compas)**.

L'ensemble des nombres constructibles

Constructions élémentaires

Proposition

Si A et B sont deux points constructibles, alors le milieu et la médiatrice du segment $[AB]$ sont constructibles.

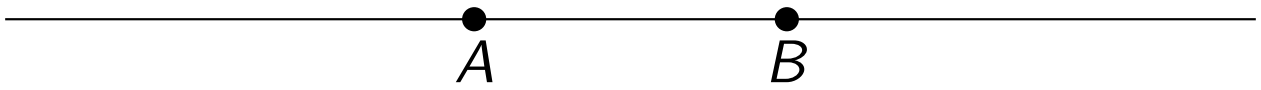
Proposition

Si A et B sont deux points constructibles, alors le milieu et la médiatrice du segment $[AB]$ sont constructibles.



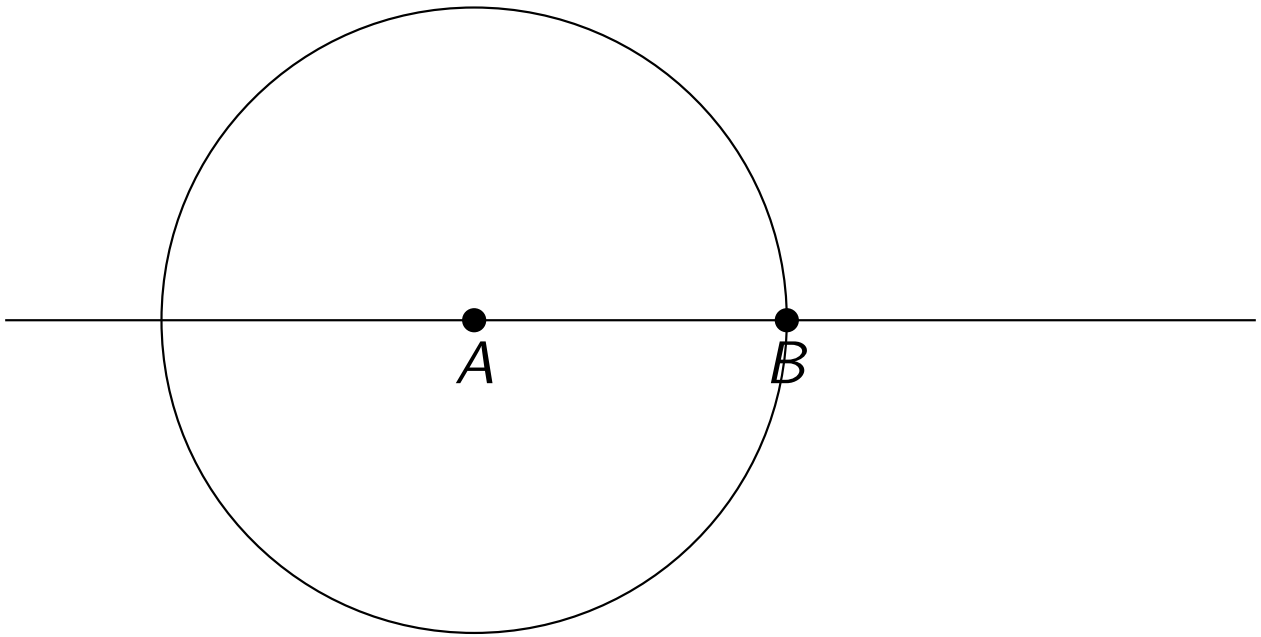
Proposition

Si A et B sont deux points constructibles, alors le milieu et la médiatrice du segment $[AB]$ sont constructibles.



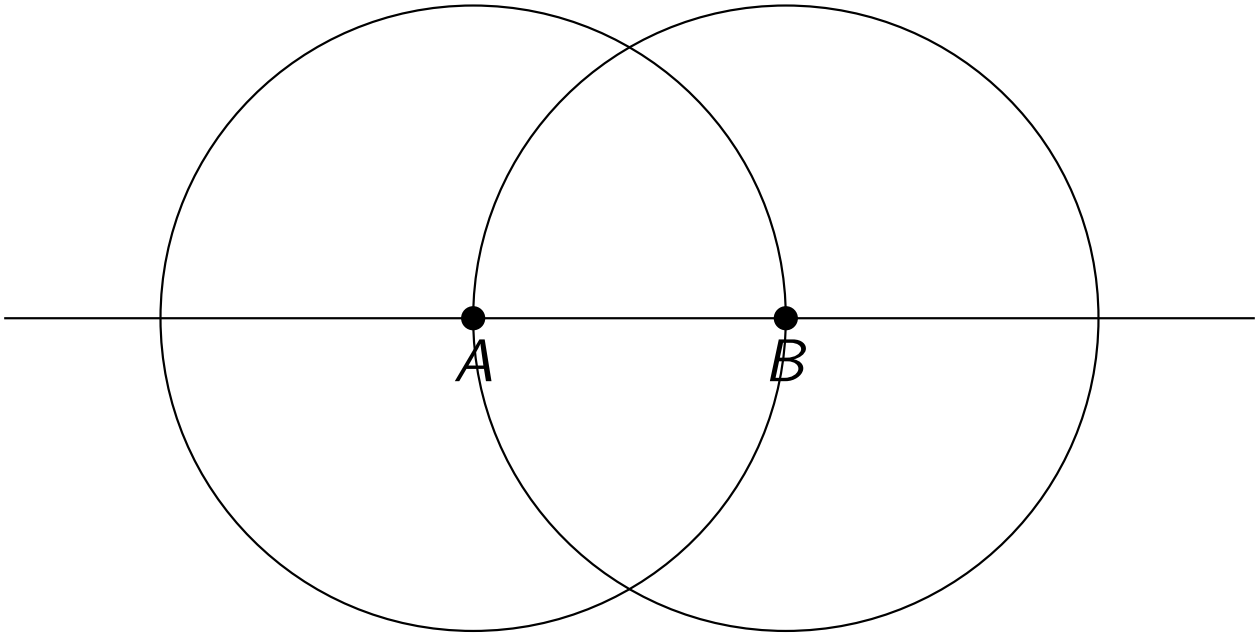
Proposition

Si A et B sont deux points constructibles, alors le milieu et la médiatrice du segment $[AB]$ sont constructibles.



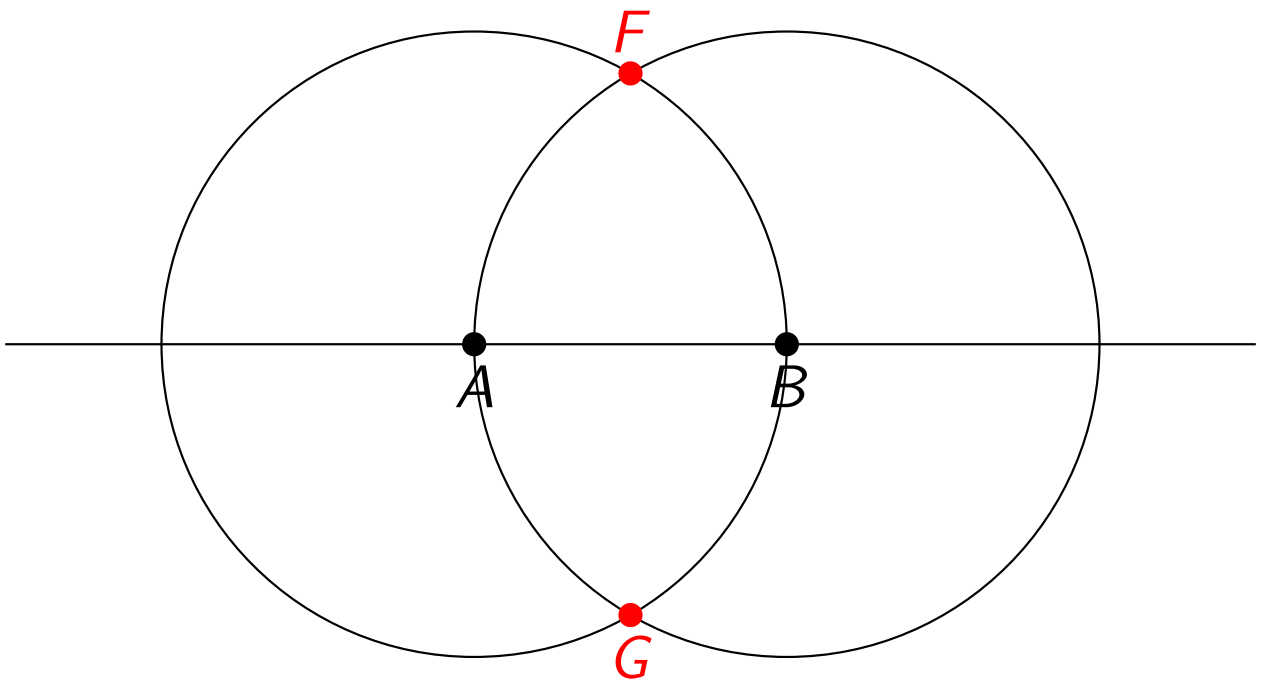
Proposition

Si A et B sont deux points constructibles, alors le milieu et la médiatrice du segment $[AB]$ sont constructibles.



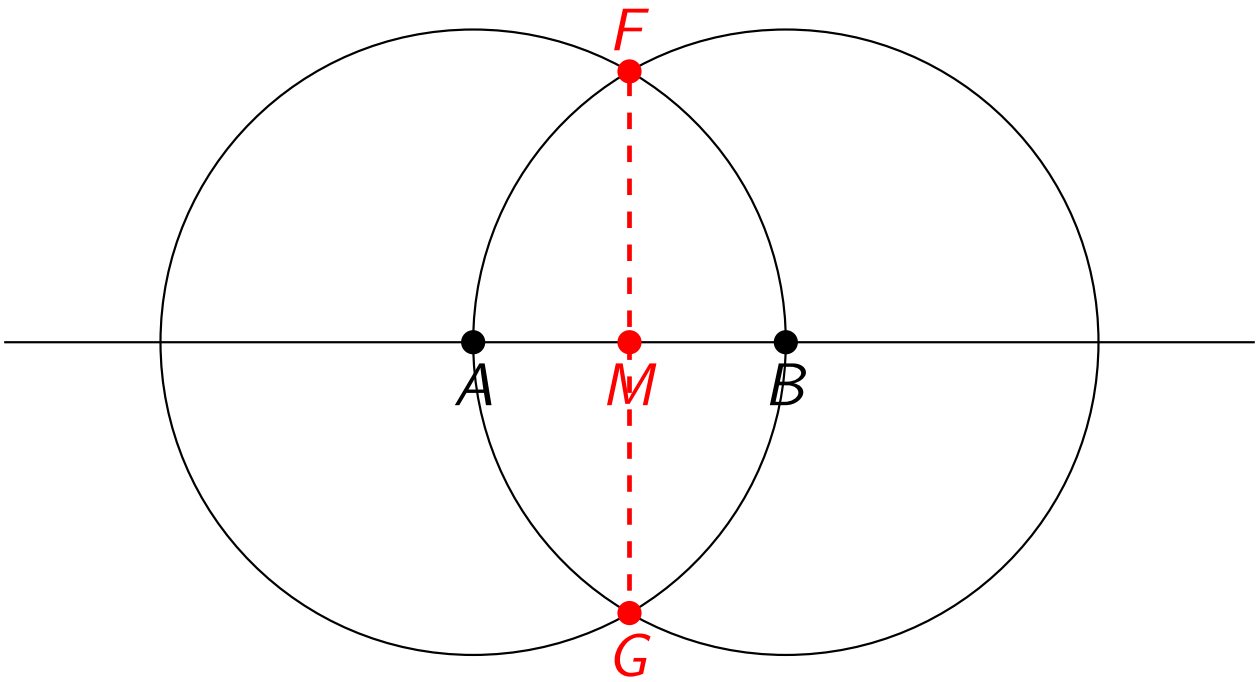
Proposition

Si A et B sont deux points constructibles, alors le milieu et la médiatrice du segment $[AB]$ sont constructibles.



Proposition

Si A et B sont deux points constructibles, alors le milieu et la médiatrice du segment $[AB]$ sont constructibles.

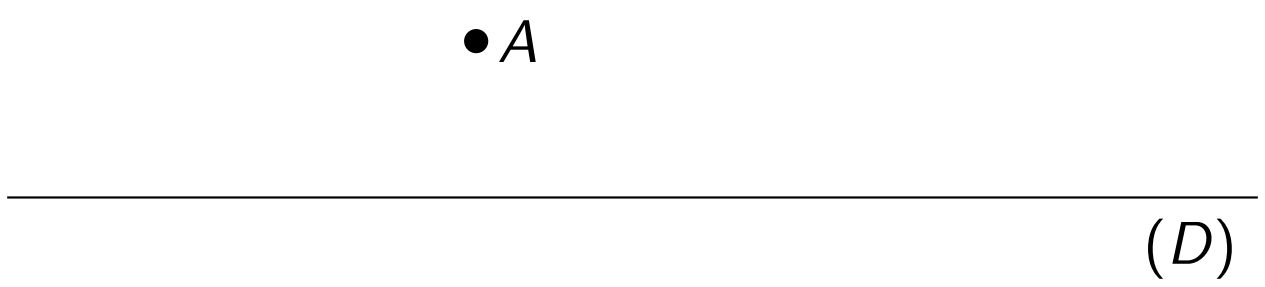


Proposition

Si A est un point constructible et (D) est une droite constructible, alors la perpendiculaire à (D) passant par A est constructible.

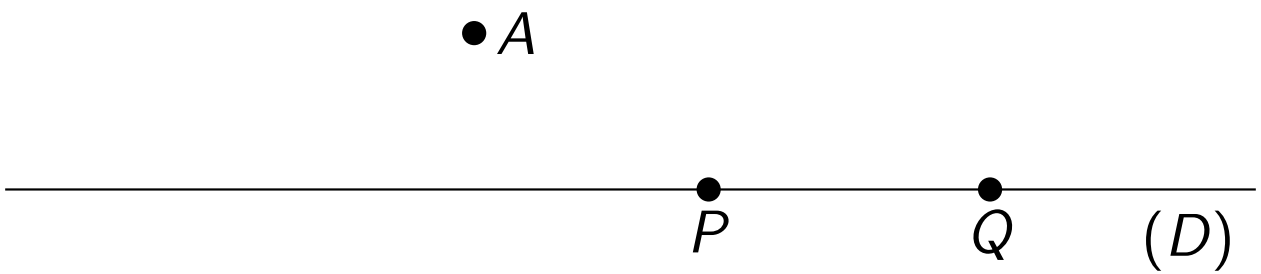
Proposition

Si A est un point constructible et (D) est une droite constructible, alors la perpendiculaire à (D) passant par A est constructible.



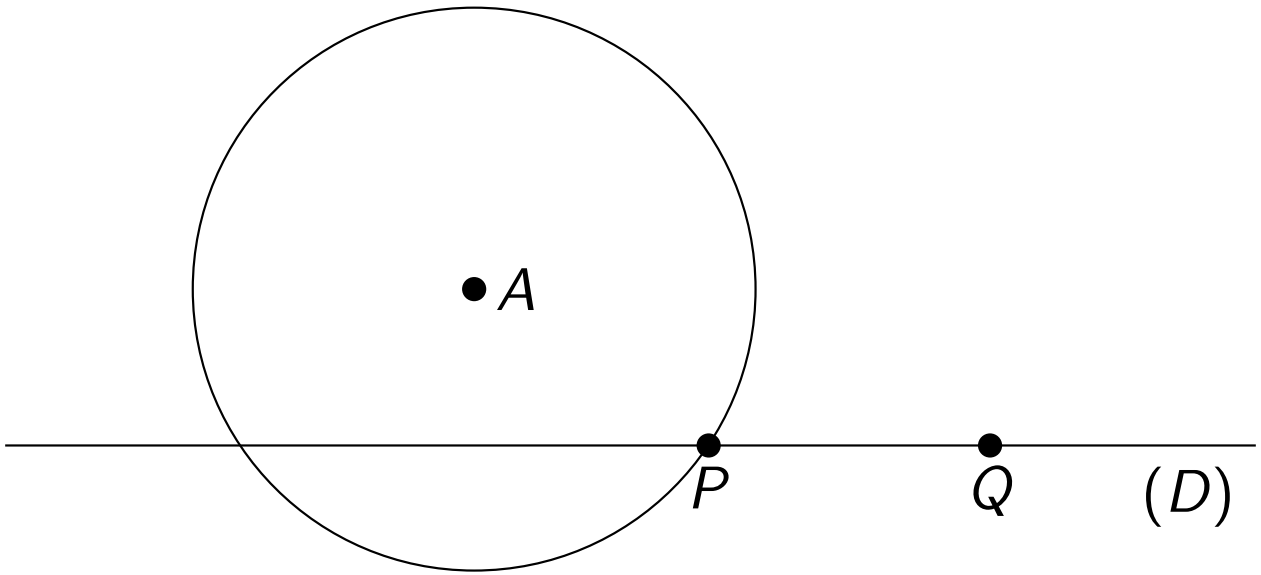
Proposition

Si A est un point constructible et (D) est une droite constructible, alors la perpendiculaire à (D) passant par A est constructible.



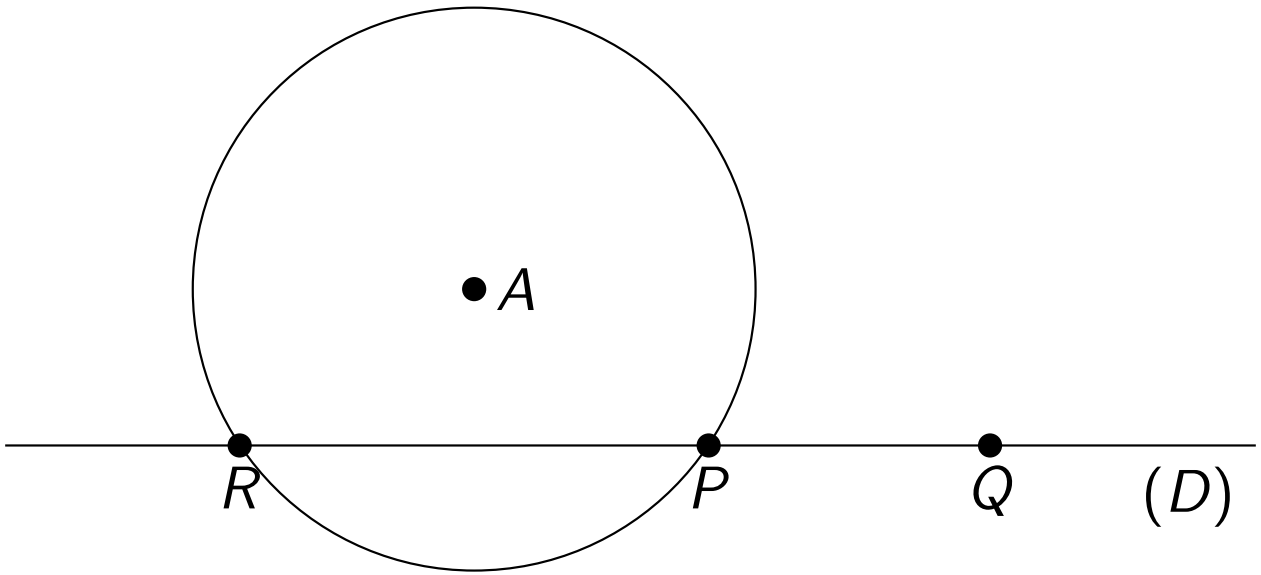
Proposition

Si A est un point constructible et (D) est une droite constructible, alors la perpendiculaire à (D) passant par A est constructible.



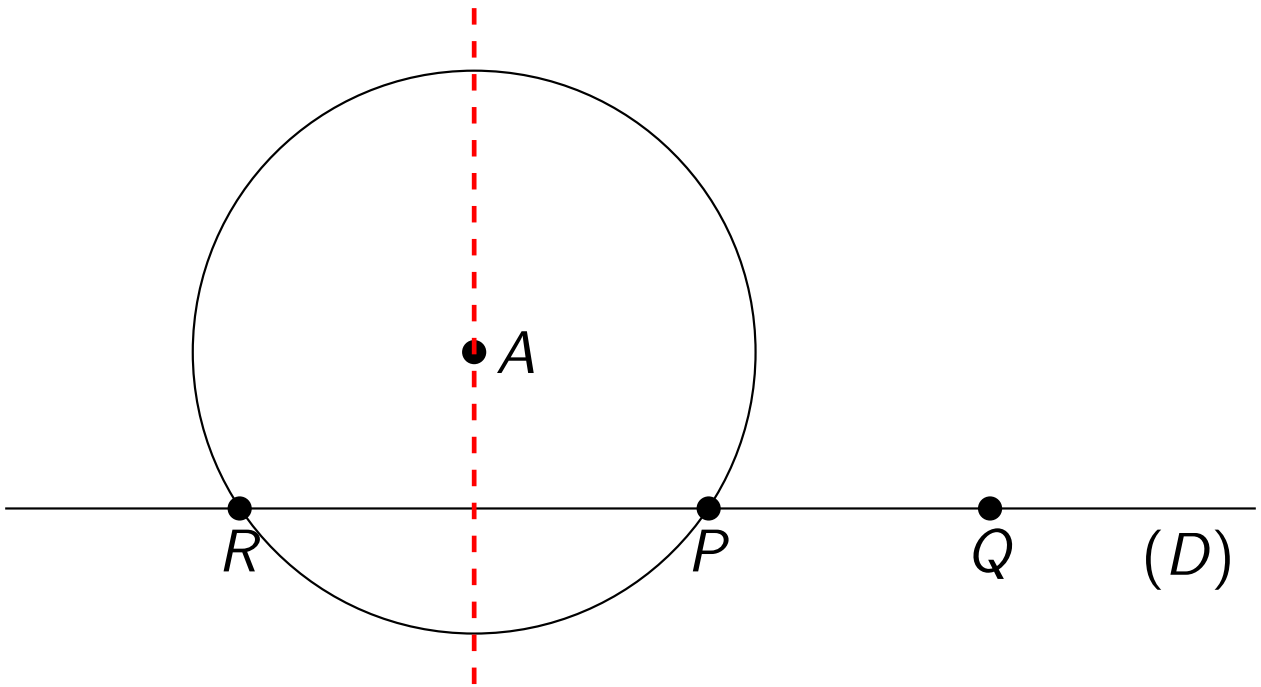
Proposition

Si A est un point constructible et (D) est une droite constructible, alors la perpendiculaire à (D) passant par A est constructible.

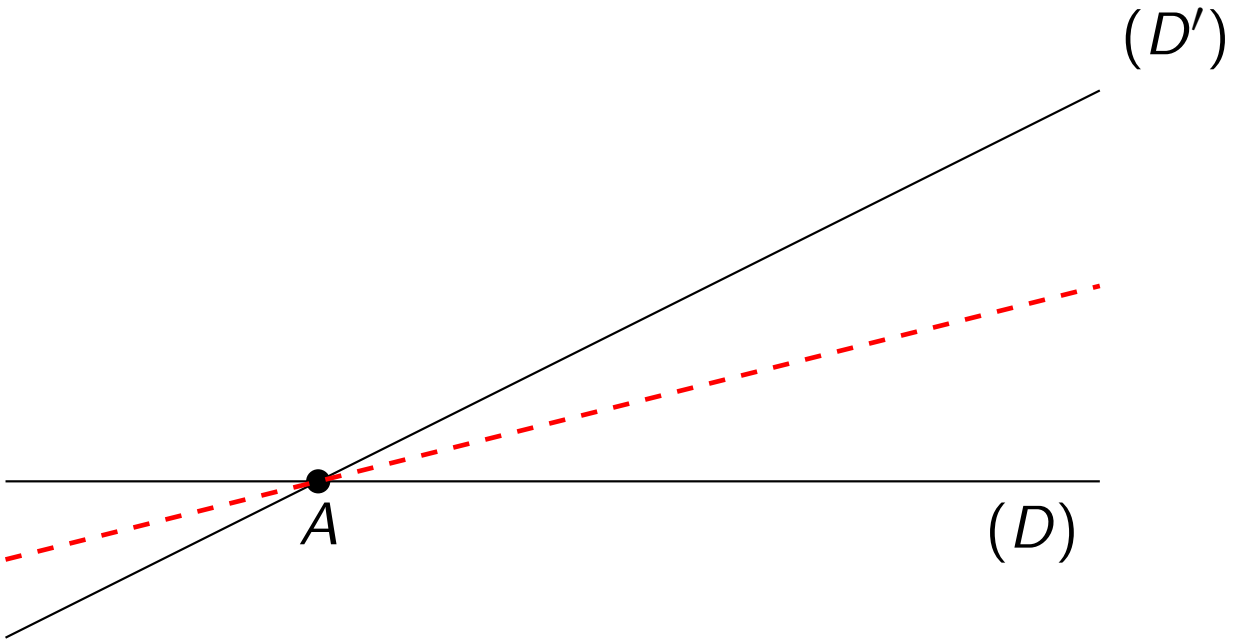


Proposition

Si A est un point constructible et (D) est une droite constructible, alors la perpendiculaire à (D) passant par A est constructible.



Exercice. Montrer que si (D) et (D') sont deux droites constructibles non parallèles, la bissectrice de l'angle formé par (D) et (D') est constructible.



Dans toute la suite, on prendra $\mathcal{B} = \{O, I\}$, où O et I sont deux points distincts du plan.

Dans toute la suite, on prendra $\mathcal{B} = \{O, I\}$, où O et I sont deux points distincts du plan.

On peut construire un repère orthonormé (O, I, J) avec les résultats précédents, ce qui va nous permettre d'utiliser des coordonnées.

Dans toute la suite, on prendra $\mathcal{B} = \{O, I\}$, où O et I sont deux points distincts du plan.

On peut construire un repère orthonormé (O, I, J) avec les résultats précédents, ce qui va nous permettre d'utiliser des coordonnées.

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est *constructible* lorsque c'est l'une des coordonnées, dans le repère (O, I, J), d'un point constructible.

Dans toute la suite, on prendra $\mathcal{B} = \{O, I\}$, où O et I sont deux points distincts du plan.

On peut construire un repère orthonormé (O, I, J) avec les résultats précédents, ce qui va nous permettre d'utiliser des coordonnées.

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est *constructible* lorsque c'est l'une des coordonnées, dans le repère (O, I, J), d'un point constructible.

Question. Quels sont les nombres réels constructibles ?

L'ensemble des nombres constructibles

Structure algébrique

L'ensemble des nombres constructibles

Structure algébrique

À partir de deux nombres constructibles x et y, on peut construire :

L'ensemble des nombres constructibles

Structure algébrique

À partir de deux nombres constructibles x et y, on peut construire :

- $-x$,

L'ensemble des nombres constructibles

Structure algébrique

À partir de deux nombres constructibles x et y, on peut construire :

- $-x$,
- $x + y$,

L'ensemble des nombres constructibles

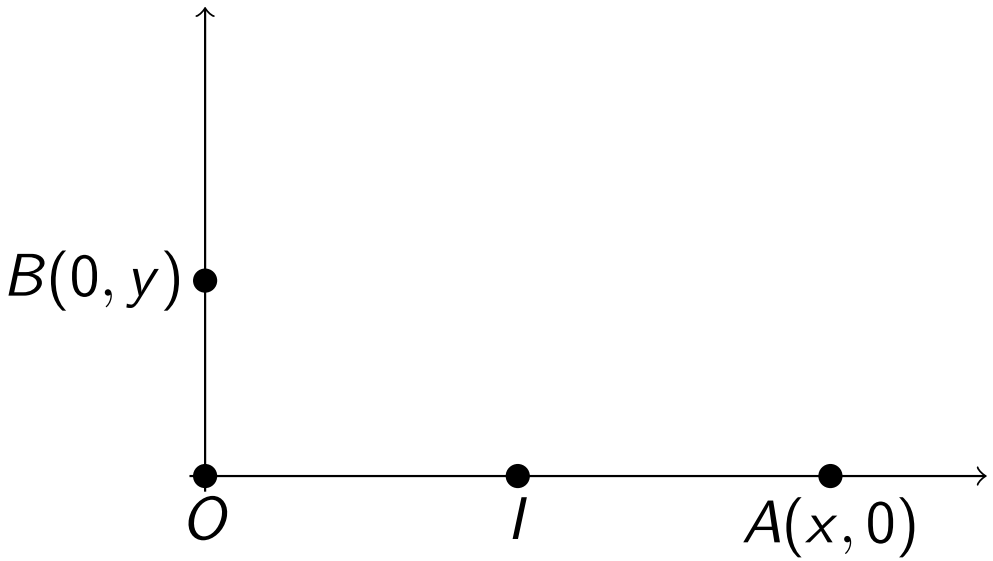
Structure algébrique

À partir de deux nombres constructibles x et y, on peut construire :

- $-x$,
- $x + y$,
- xy.

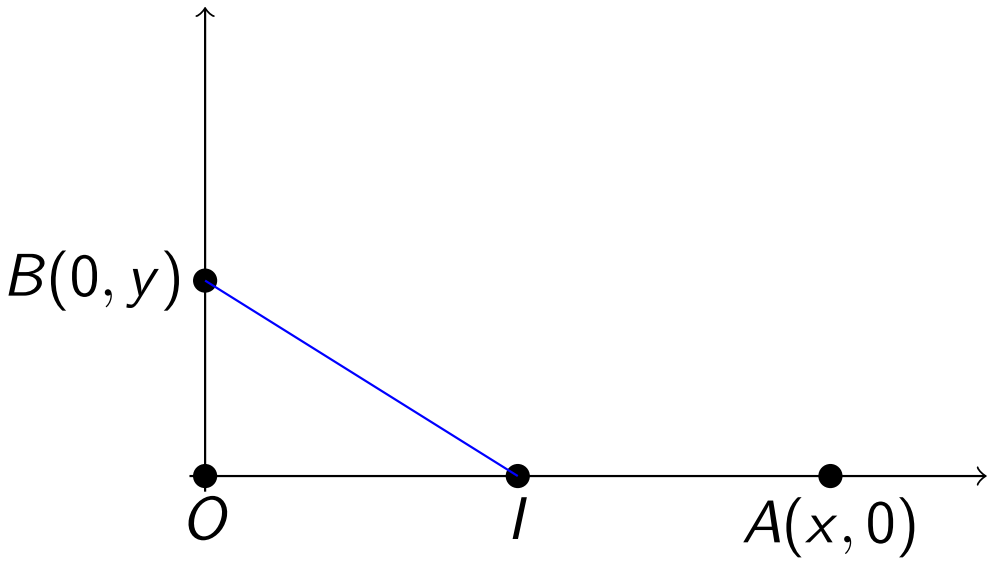
À partir de deux nombres constructibles x et y, on peut construire :

- $-x$,
- $x + y$,
- xy.



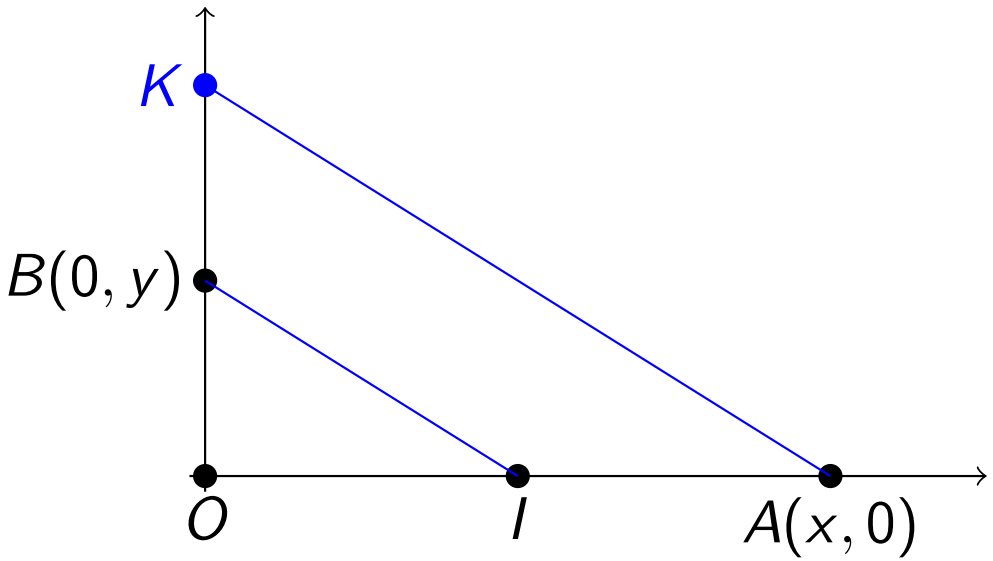
À partir de deux nombres constructibles x et y, on peut construire :

- $-x$,
- $x + y$,
- xy.



À partir de deux nombres constructibles x et y, on peut construire :

- $-x$,
- $x + y$,
- xy.



Si x est un nombre constructible, on peut également construire :

Si x est un nombre constructible, on peut également construire :

- $1/x$ lorsque $x \neq 0$, de nouveau avec le théorème de Thalès,

Si x est un nombre constructible, on peut également construire :

- $1/x$ lorsque $x \neq 0$, de nouveau avec le théorème de Thalès,
- $\sqrt{x}$ lorsque $x \geq 0$, à l'aide du théorème de Pythagore.

Si x est un nombre constructible, on peut également construire :

- $1/x$ lorsque $x \neq 0$, de nouveau avec le théorème de Thalès,
- $\sqrt{x}$ lorsque $x \geq 0$, à l'aide du théorème de Pythagore.

Théorème

L'ensemble des nombres constructibles est un corps stable par racine carrée.

Le théorème de Wantzel

Notion de polynôme minimal

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est *algébrique* (sur $\mathbb{Q}$) lorsqu'il existe un polynôme P non nul à coefficients rationnels tel que $P(a) = 0$.

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est *algébrique* (sur $\mathbb{Q}$) lorsqu'il existe un polynôme P non nul à coefficients rationnels tel que $P(a) = 0$.

Par exemple, $\sqrt{2}$ est algébrique car si $P(X) = X^2 - 2$, alors $P(\sqrt{2}) = 0$.

Le théorème de Wantzel

Notion de polynôme minimal

Si $a \in \mathbb{R}$ est algébrique, alors il existe un unique polynôme $\mu(X)$:

- unitaire (son coefficient de plus haut degré vaut 1),
- irréductible sur $\mathbb{Q}$ (on ne peut pas le factoriser),
- vérifiant $\mu(a) = 0$.

Si $a \in \mathbb{R}$ est algébrique, alors il existe un unique polynôme $\mu(X)$:

- unitaire (son coefficient de plus haut degré vaut 1),
- irréductible sur $\mathbb{Q}$ (on ne peut pas le factoriser),
- vérifiant $\mu(a) = 0$.

On dit alors que $\mu(X)$ est le *polynôme minimal* de a.

Si $a \in \mathbb{R}$ est algébrique, alors il existe un unique polynôme $\mu(X)$:

- unitaire (son coefficient de plus haut degré vaut 1),
- irréductible sur $\mathbb{Q}$ (on ne peut pas le factoriser),
- vérifiant $\mu(a) = 0$.

On dit alors que $\mu(X)$ est le *polynôme minimal* de a.

Exercice. Quel est le polynôme minimal de $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$?

Le théorème de Wantzel

Un résultat crucial

Le théorème de Wantzel

Un résultat crucial

Théorème (Wantzel, 1837)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors x est constructible si, et seulement, si [. . .].

Le théorème de Wantzel

Un résultat crucial

Théorème (Wantzel, 1837)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors x est constructible si, et seulement, si [...].

Corollaire

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x est constructible, alors x est algébrique et le degré de son polynôme minimal est une puissance de 2.

Le théorème de Wantzel

Résolution des trois problèmes

Quadrature du cercle.

Quadrature du cercle.
Ferdinand von Lindemann démontre en 1882 que π n'est pas algébrique (on dit qu'il est *transcendant*)

Quadrature du cercle.
Ferdinand von Lindemann démontre en 1882 que π n'est pas algébrique (on dit qu'il est *transcendant*) $\rightarrow$ quadrature du cercle impossible

Quadrature du cercle.
Ferdinand von Lindemann démontre en 1882 que π n'est pas algébrique (on dit qu'il est *transcendant*) $\rightarrow$ quadrature du cercle impossible

Duplication du cube.

Quadrature du cercle.
Ferdinand von Lindemann démontre en 1882 que π n'est pas algébrique (on dit qu'il est *transcendant*) $\rightarrow$ quadrature du cercle impossible

Duplication du cube.
Le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ est $X^3 - 2$, dont le degré n'est pas une puissance de 2

Quadrature du cercle.
Ferdinand von Lindemann démontre en 1882 que π n'est pas algébrique (on dit qu'il est *transcendant*) $\rightarrow$ quadrature du cercle impossible

Duplication du cube.
Le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ est $X^3 - 2$, dont le degré n'est pas une puissance de 2 $\rightarrow$ duplication du cube impossible

Quadrature du cercle.
Ferdinand von Lindemann démontre en 1882 que π n'est pas algébrique (on dit qu'il est *transcendant*) $\rightarrow$ quadrature du cercle impossible

Duplication du cube.
Le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ est $X^3 - 2$, dont le degré n'est pas une puissance de 2 $\rightarrow$ duplication du cube impossible

Trisection de l'angle.

Quadrature du cercle.
Ferdinand von Lindemann démontre en 1882 que π n'est pas algébrique (on dit qu'il est *transcendant*) $\rightarrow$ quadrature du cercle impossible

Duplication du cube.
Le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ est $X^3 - 2$, dont le degré n'est pas une puissance de 2 $\rightarrow$ duplication du cube impossible

Trisection de l'angle.
Le corollaire précédent du théorème de Wantzel permet de montrer que l'angle de 60° n'est pas trisectable

Quadrature du cercle.
Ferdinand von Lindemann démontre en 1882 que π n'est pas algébrique (on dit qu'il est *transcendant*) $\rightarrow$ quadrature du cercle impossible

Duplication du cube.
Le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ est $X^3 - 2$, dont le degré n'est pas une puissance de 2 $\rightarrow$ duplication du cube impossible

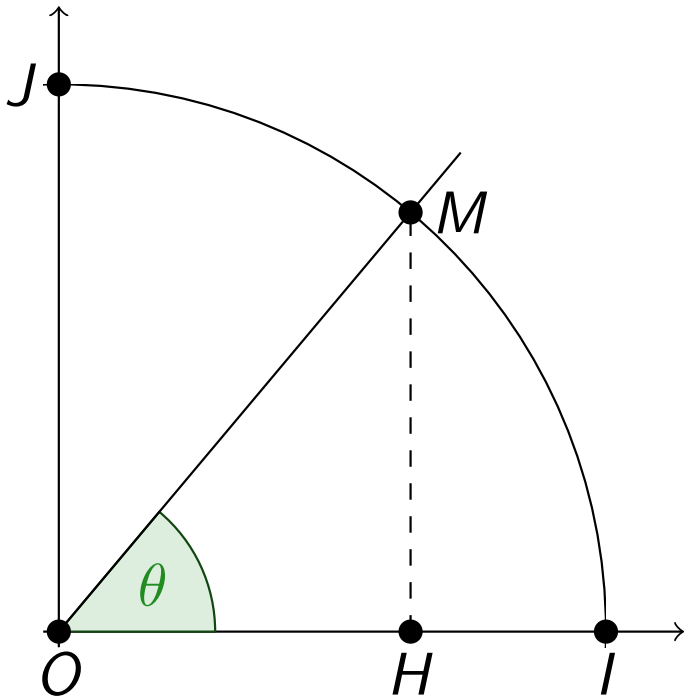
Trisection de l'angle.
Le corollaire précédent du théorème de Wantzel permet de montrer que l'angle de 60° n'est pas trisectable $\rightarrow$ pas de méthode générale

Le théorème de Gauss-Wantzel

Angles et polygones constructibles

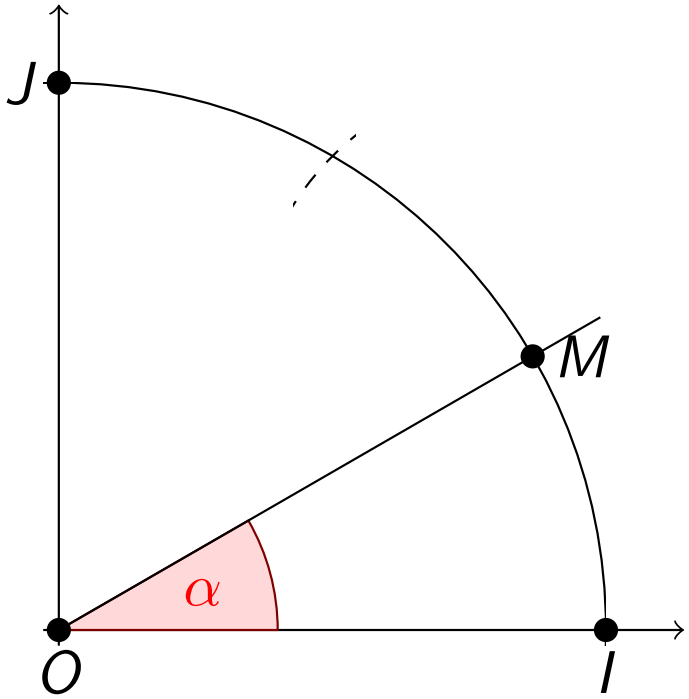
Définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On dit que l'angle $\widehat{\theta} = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est *constructible* lorsque le point M ci-dessous est constructible, i.e. lorsque $\cos(\theta)$ est constructible.



Définition

Soit $n \geq 3$ un entier. On dit que le polygone régulier à n côtés est *constructible* lorsque l'angle $\widehat{\alpha} = \widehat{2\pi/n}$ est constructible.



Le théorème de Gauss-Wantzel

Caractérisation des polygones réguliers constructibles

On dit que p est un *nombre premier de Fermat* lorsque c'est un nombre premier qui s'écrit sous la forme :

$$p = 1 + 2^{2^k} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Le théorème de Gauss-Wantzel

Caractérisation des polygones réguliers constructibles

On dit que p est un *nombre premier de Fermat* lorsque c'est un nombre premier qui s'écrit sous la forme :

$$p = 1 + 2^{2^k} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Théorème (Gauss)

Soit $n \geq 3$ un entier. Alors le polygone régulier à n côtés est constructible si, et seulement si :

$$n = 2^m \quad \text{ou} \quad n = 2^m p_1 \cdots p_r$$

où $m \in \mathbb{N}$, et $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers de Fermat distincts.

Le théorème de Gauss-Wantzel

Caractérisation des polygones réguliers constructibles

On dit que p est un *nombre premier de Fermat* lorsque c'est un nombre premier qui s'écrit sous la forme :

$$p = 1 + 2^{2^k} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Théorème (Gauss)

Soit $n \geq 3$ un entier. Alors le polygone régulier à n côtés est constructible si, et seulement si :

$$n = 2^m \quad \text{ou} \quad n = 2^m p_1 \cdots p_r$$

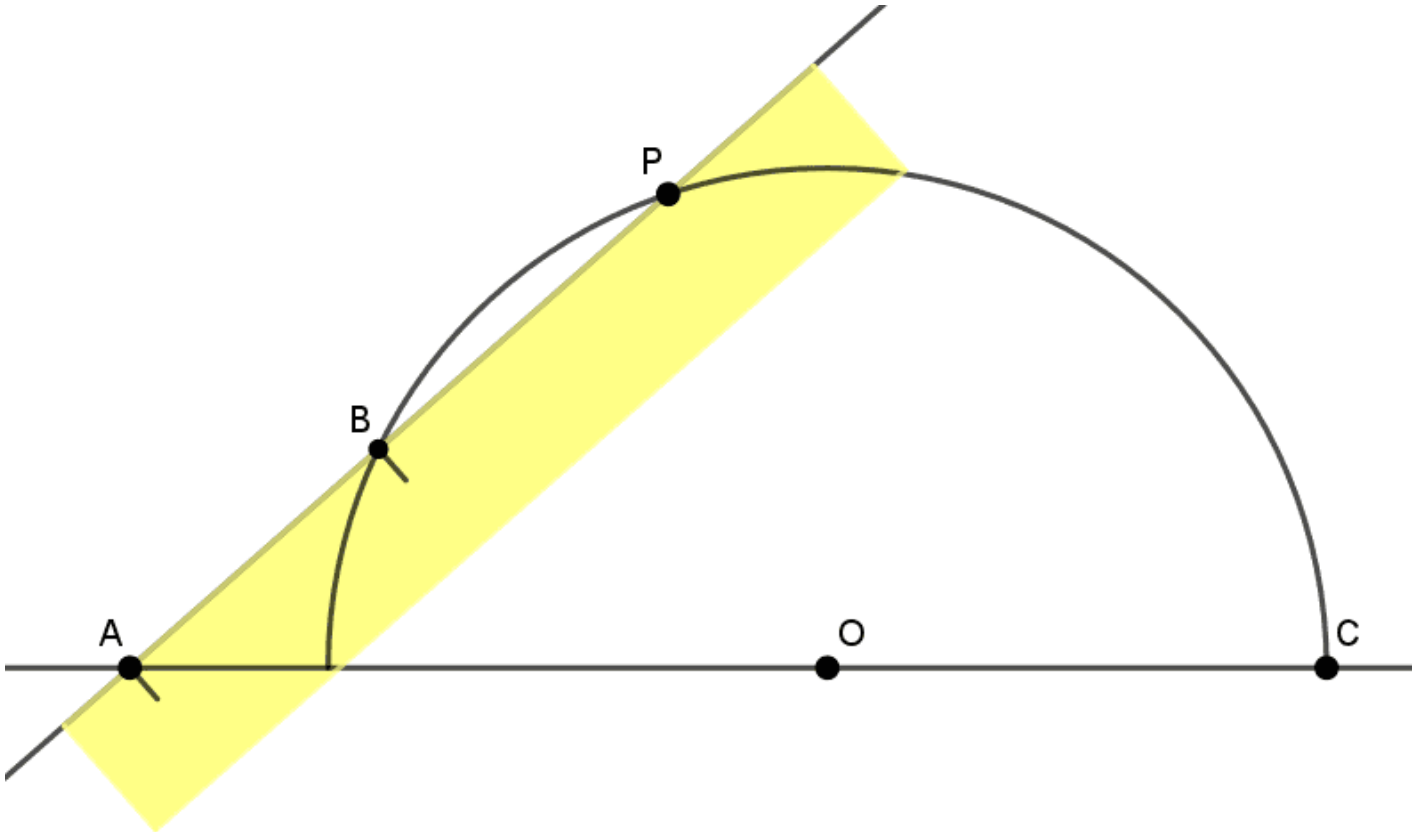
où $m \in \mathbb{N}$, et $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers de Fermat distincts.

La démonstration fait appel à la théorie de Galois (on s'intéresse au groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})$ où ω est une racine primitive de l'unité).

Et si on changeait un peu les règles ?

Et si on changeait un peu les règles ?

Jusqu'à présent, nous étions contraints d'utiliser uniquement une règle **non graduée** et un compas. Et si on ajoutait deux graduations ?

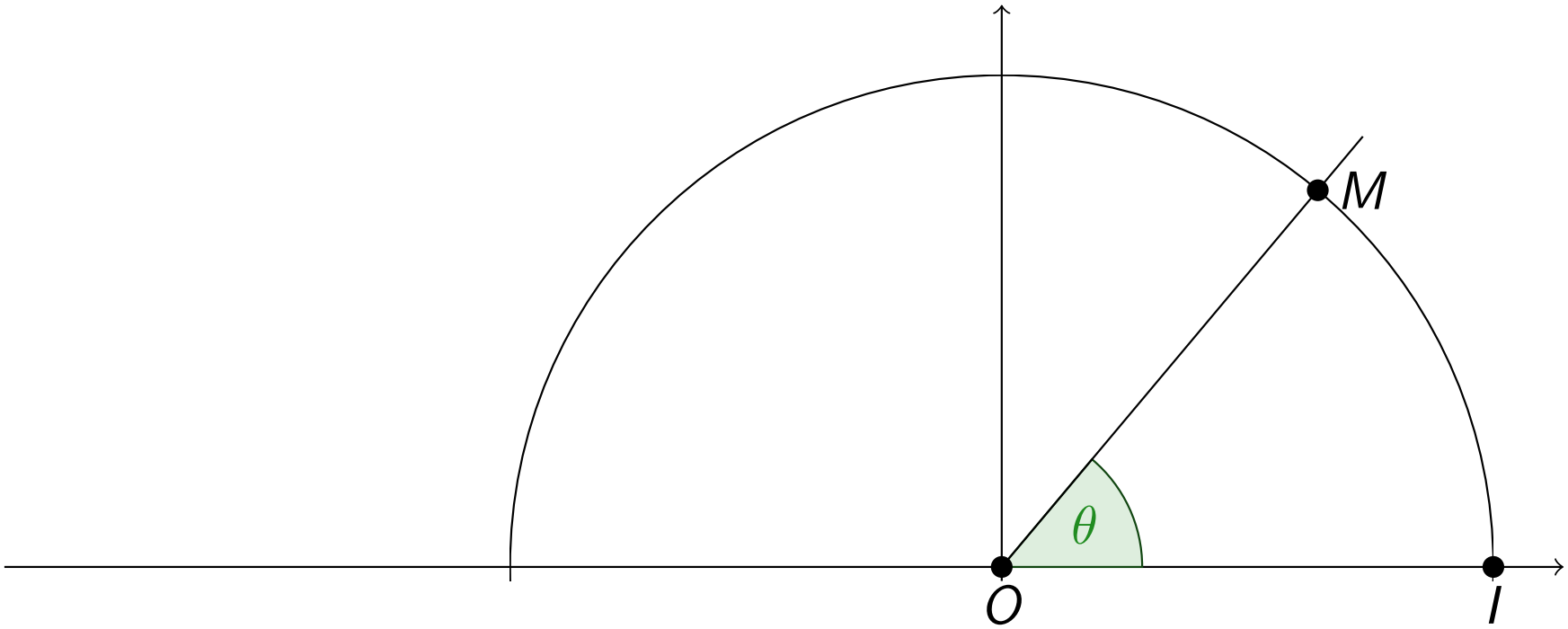


Et si on changeait un peu les règles ?

Avec une règle graduée, la trisection de l'angle devient possible !

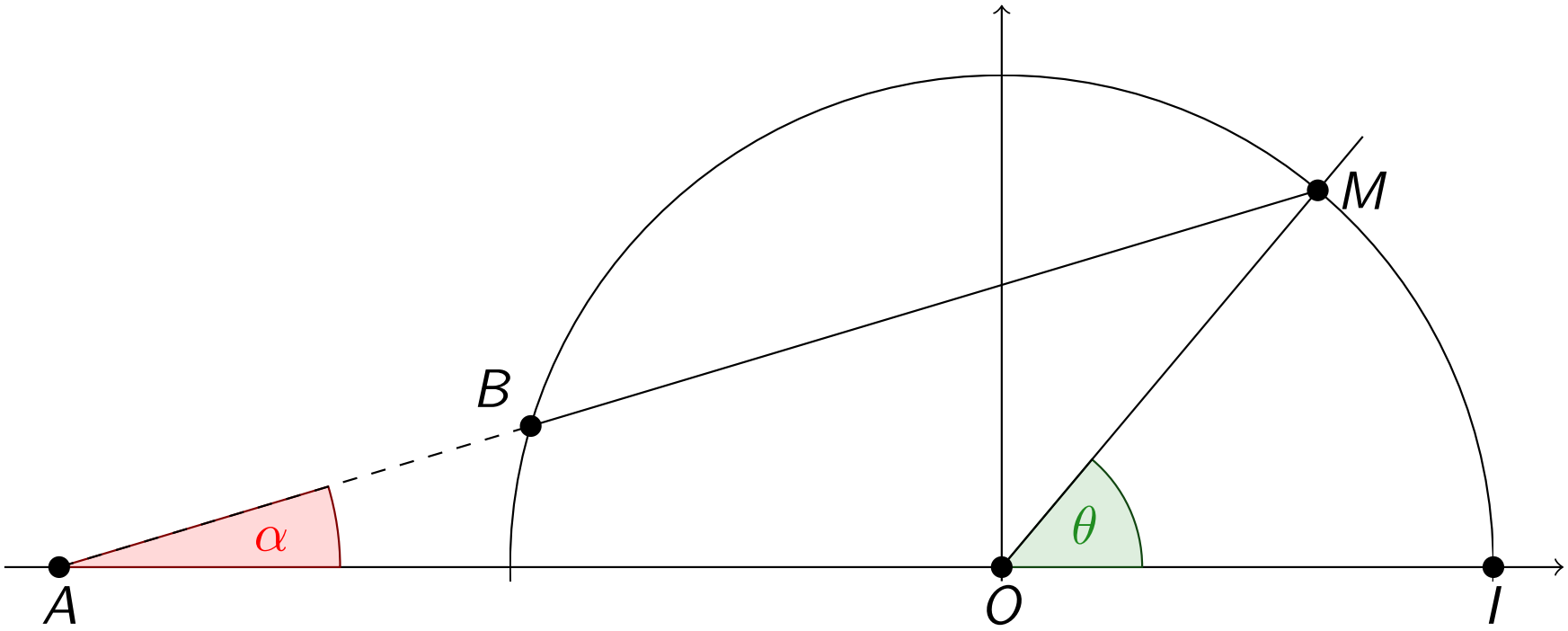
Et si on changeait un peu les règles ?

Avec une règle graduée, la trisection de l'angle devient possible !



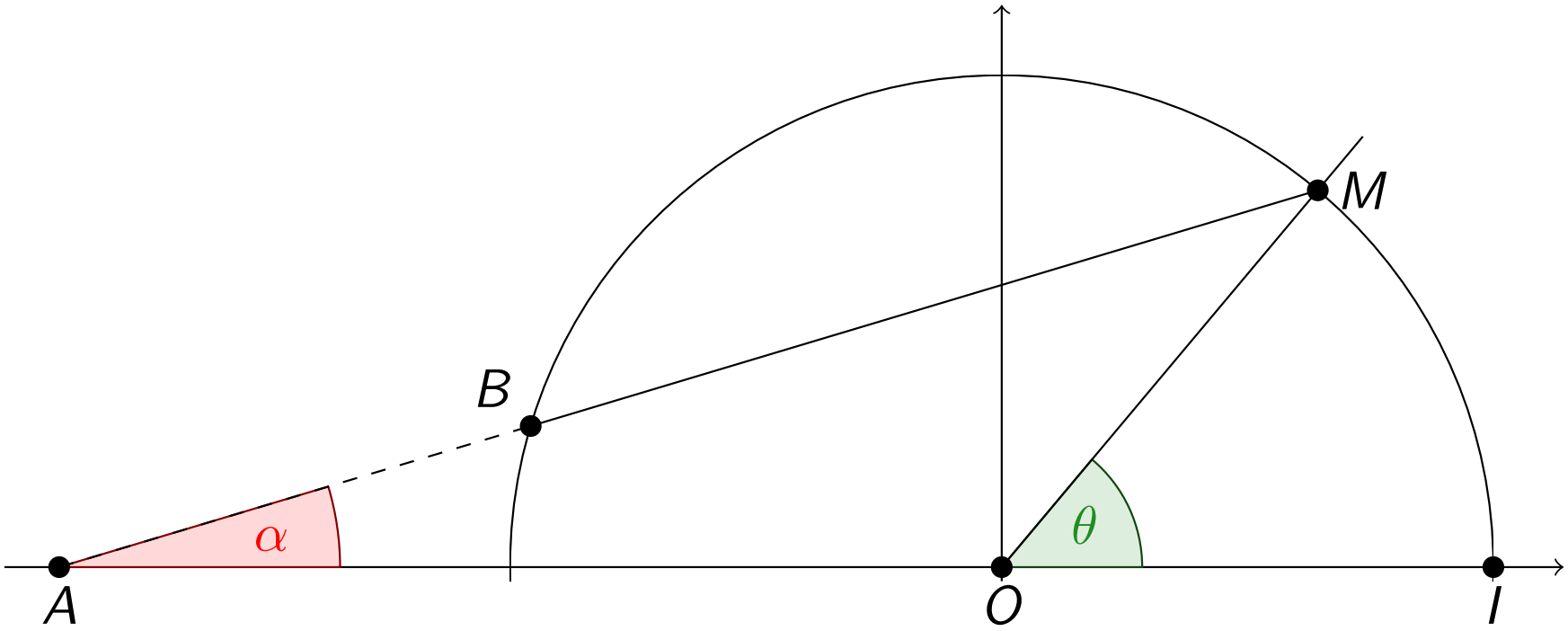
Et si on changeait un peu les règles ?

Avec une règle graduée, la trisection de l'angle devient possible !



Et si on changeait un peu les règles ?

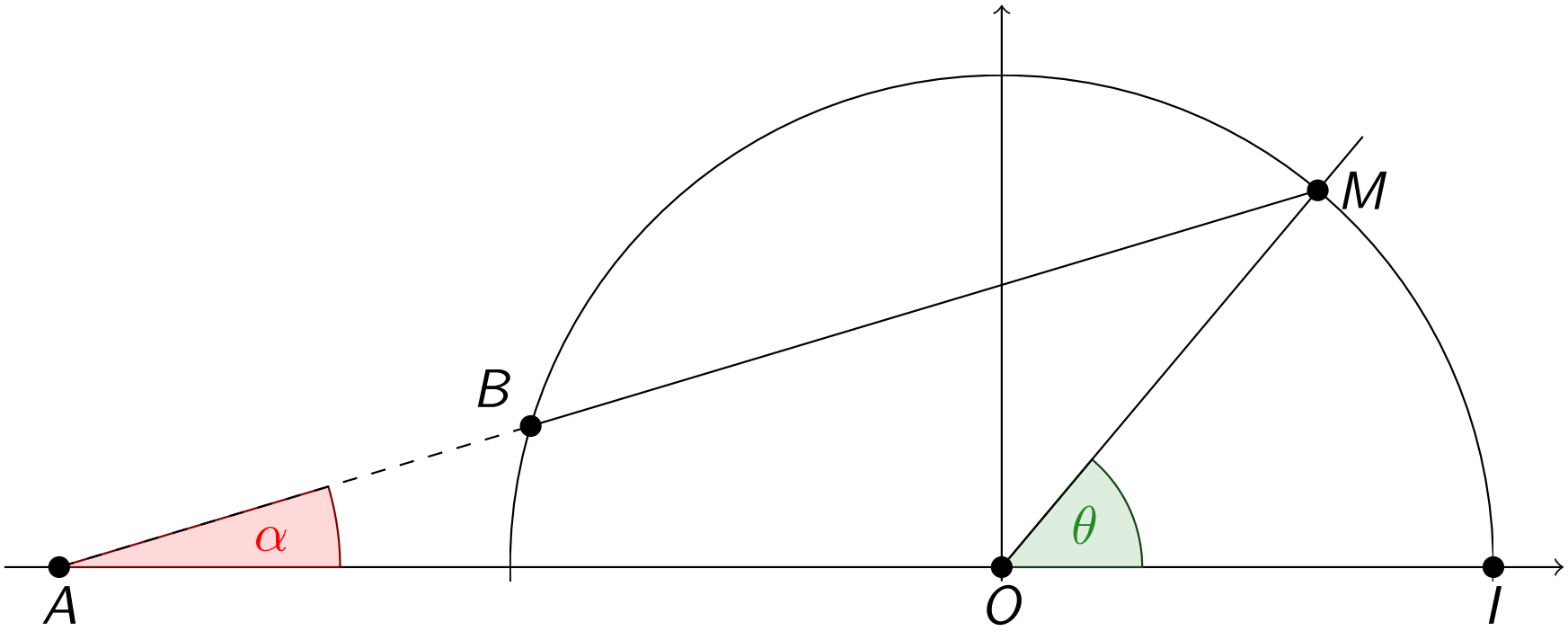
Avec une règle graduée, la trisection de l'angle devient possible !



Les points A et B sont placés de telle sorte que $AB = 1$.

Et si on changeait un peu les règles ?

Avec une règle graduée, la trisection de l'angle devient possible !



Les points A et B sont placés de telle sorte que $AB = 1$.

Exercice. Montrer que $\alpha = \dfrac{\theta}{3}$.

Et si on changeait un peu les règles ?

De même pour la duplication du cube !

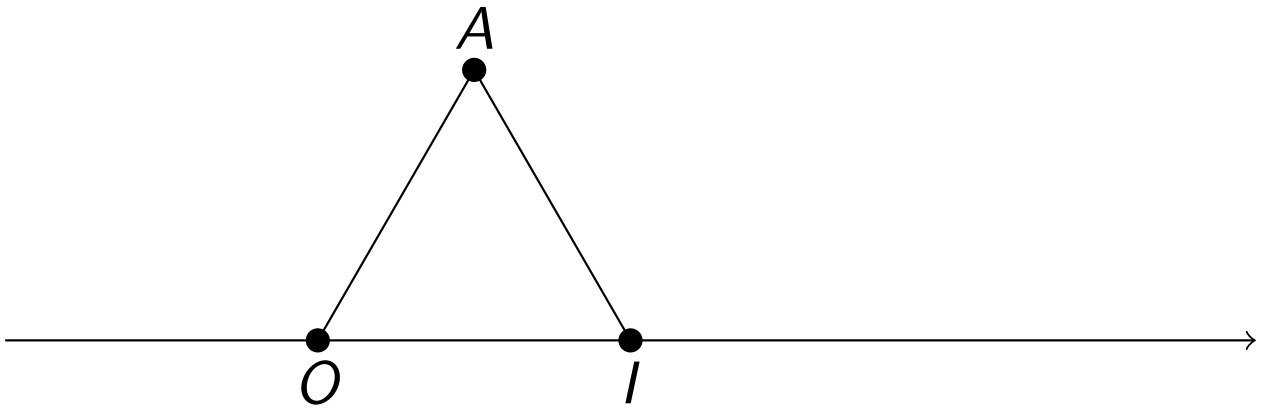
Et si on changeait un peu les règles ?

De même pour la duplication du cube !



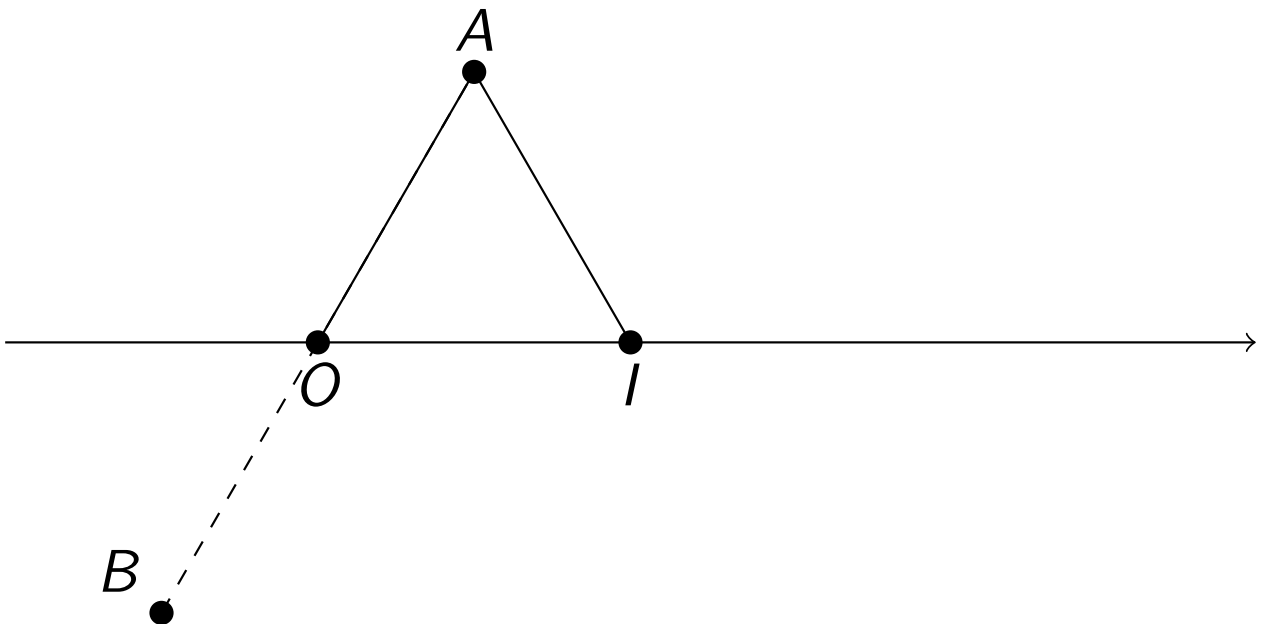
Et si on changeait un peu les règles ?

De même pour la duplication du cube !



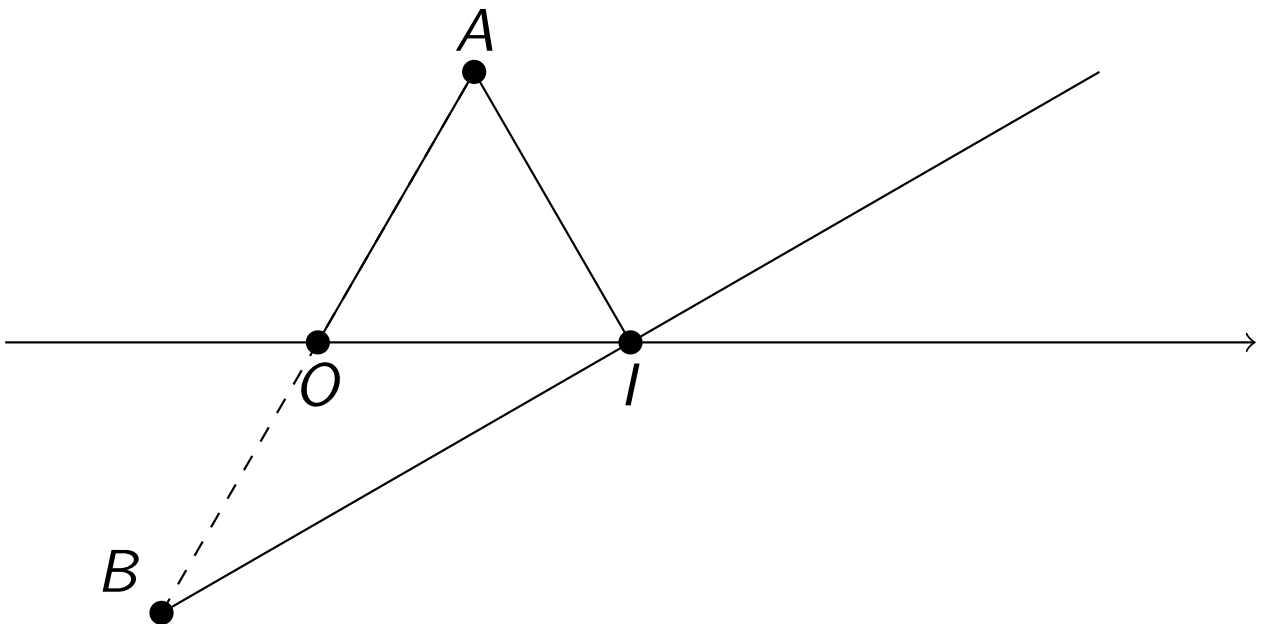
Et si on changeait un peu les règles ?

De même pour la duplication du cube !



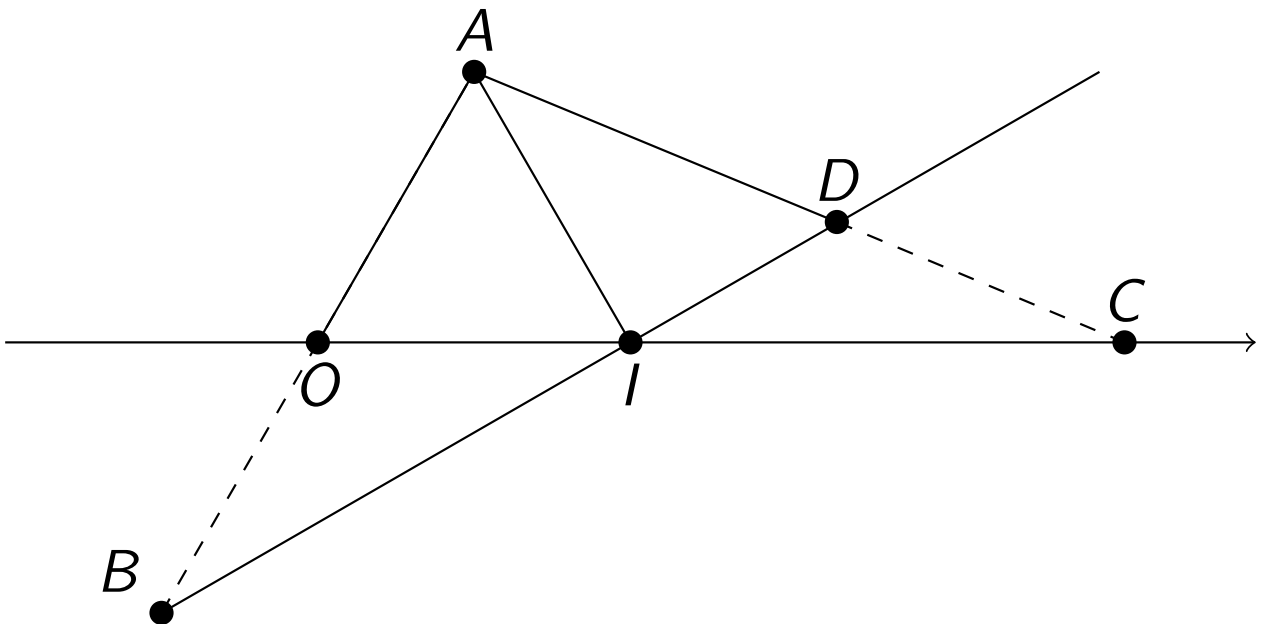
Et si on changeait un peu les règles ?

De même pour la duplication du cube !



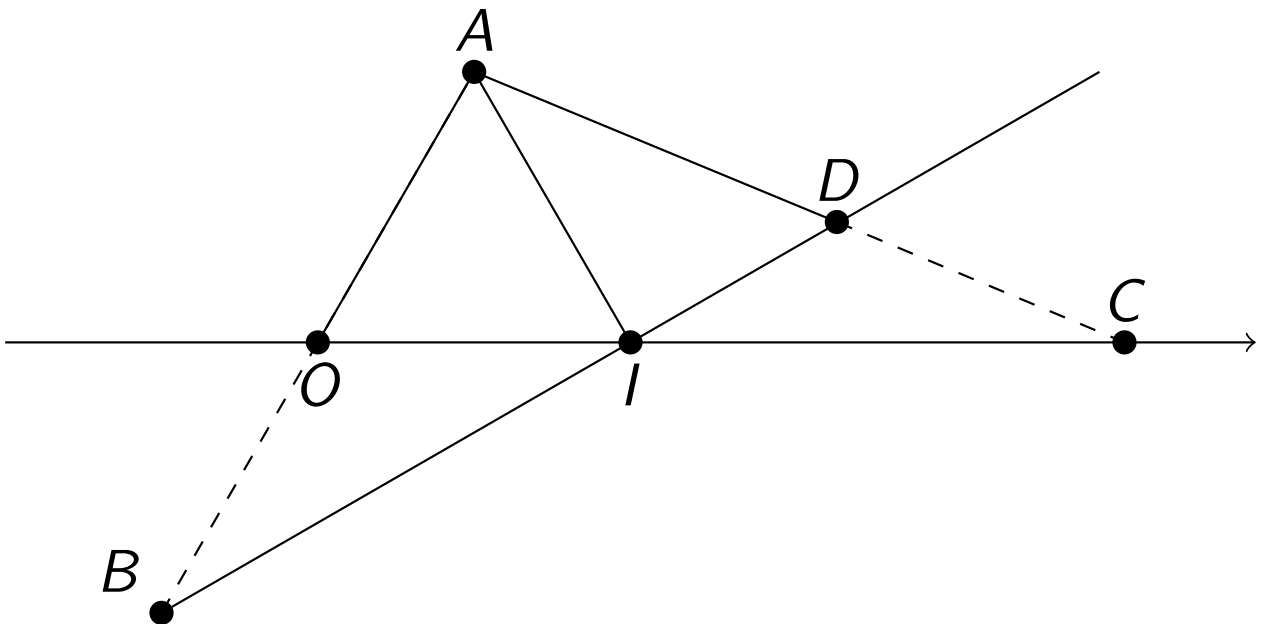
Et si on changeait un peu les règles ?

De même pour la duplication du cube !



Et si on changeait un peu les règles ?

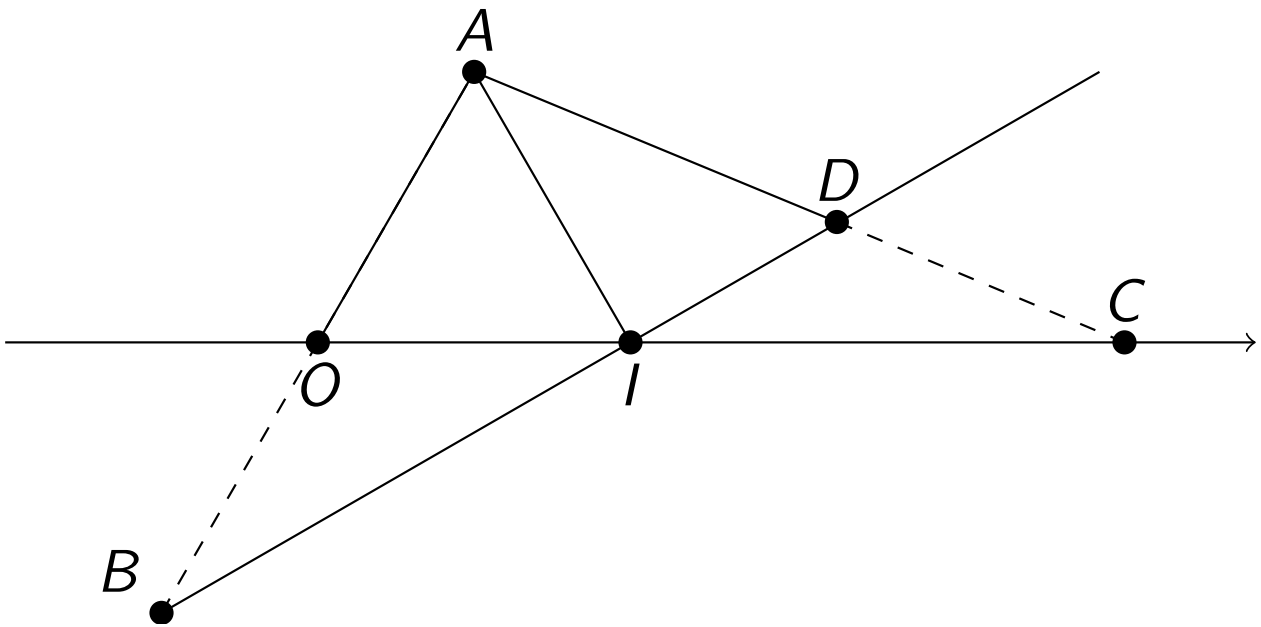
De même pour la duplication du cube !



Les points B, C et D sont placés de telle sorte que $OB = CD = 1$.

Et si on changeait un peu les règles ?

De même pour la duplication du cube !



Les points B, C et D sont placés de telle sorte que $OB = CD = 1$.

Exercice. Montrer que $AD^3 = 2$ (difficile).

Et si on changeait un peu les règles ?

Et pour les deux autres problèmes ?

Et si on changeait un peu les règles ?

Et pour les deux autres problèmes ?

Concernant la quadrature du cercle, les nombres constructibles à la règle graduée et au compas restent toujours algébriques $\rightarrow$ toujours impossible

Et si on changeait un peu les règles ?

Et pour les deux autres problèmes ?

Concernant la quadrature du cercle, les nombres constructibles à la règle graduée et au compas restent toujours algébriques $\rightarrow$ toujours impossible

Pour le polygone régulier à n côtés :

Et si on changeait un peu les règles ?

Et pour les deux autres problèmes ?

Concernant la quadrature du cercle, les nombres constructibles à la règle graduée et au compas restent toujours algébriques $\rightarrow$ toujours impossible

Pour le polygone régulier à n côtés :

- il devient possible de le construire pour $n = 7, 9, 13, 14, 18, 19, 21, 26, 27, 28, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 52, 54, 56, 57, 63, 65, 70, 72, 73, 74, 76, 78, 81, 84, 91, 95, 97, \ldots$
- également pour $n = 11$ (démontré en 2014),

Et si on changeait un peu les règles ?

Et pour les deux autres problèmes ?

Concernant la quadrature du cercle, les nombres constructibles à la règle graduée et au compas restent toujours algébriques $\rightarrow$ toujours impossible

Pour le polygone régulier à n côtés :

- il devient possible de le construire pour $n = 7, 9, 13, 14, 18, 19, 21, 26, 27, 28, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 52, 54, 56, 57, 63, 65, 70, 72, 73, 74, 76, 78, 81, 84, 91, 95, 97, \ldots$
- également pour $n = 11$ (démontré en 2014),
- problème encore ouvert pour $n = 25, 31, 41, 61, 101, 125$ et bien d'autres valeurs !

Quelques références

Avant de conclure, voici quelques vidéos qui pourraient vous intéresser si vous souhaitez approfondir un peu le sujet...

Quelques références

Avant de conclure, voici quelques vidéos qui pourraient vous intéresser si vous souhaitez approfondir un peu le sujet...

- évidemment : ***Deux (deux ?) minutes pour la quadrature du cercle*, El Jj** ;

Quelques références

Avant de conclure, voici quelques vidéos qui pourraient vous intéresser si vous souhaitez approfondir un peu le sujet...

- évidemment : ***Deux (deux ?) minutes pour la quadrature du cercle*, El Jj** ;
- pour des constructions de polygones réguliers : ***Deux (deux ?) minutes pour l'heptagone régulier*, El Jj** ;

Quelques références

Avant de conclure, voici quelques vidéos qui pourraient vous intéresser si vous souhaitez approfondir un peu le sujet...

- évidemment : ***Deux (deux ?) minutes pour la quadrature du cercle*, El Jj** ;
- pour des constructions de polygones réguliers : ***Deux (deux ?) minutes pour l'heptagone régulier*, El Jj** ;
- pour une introduction à la notion de groupe de Galois : ***The Insolvability of the Quintic*, Aleph 0** ;

Quelques références

Avant de conclure, voici quelques vidéos qui pourraient vous intéresser si vous souhaitez approfondir un peu le sujet...

- évidemment : ***Deux (deux ?) minutes pour la quadrature du cercle*, El Jj** ;
- pour des constructions de polygones réguliers : ***Deux (deux ?) minutes pour l'heptagone régulier*, El Jj** ;
- pour une introduction à la notion de groupe de Galois : ***The Insolvability of the Quintic*, Aleph 0** ;
- pour une introduction au théorème fondamental de la théorie de Galois : ***What is the square root of two ? The Fundamental Theorem of Galois Theory*, Aleph 0**.

Merci !

Merci pour votre attention !