Structures exotiques sur $\mathbb{R}^4$ par la théorie des nœuds
Stage de fin de Master 1

Giovanni Lebaron, encadré par Gérard Besson

Année universitaire 2024–2025

Table des matières

0 Préliminaires **5**
0.1 Variétés topologiques, variétés différentielles . . . 5
0.2 Variétés à bord . . . 6
0.3 Équivalence de structures différentielles . . . 7
0.4 Plongements et sous-variétés . . . 8
0.5 Connexité des variétés . . . 10
0.6 La sphère de dimension 3 . . . 11

1 Nœuds **12**
1.1 Définitions et exemples . . . 12
1.2 Invariants de nœuds . . . 13
1.3 Arcs et orientations . . . 15
1.4 Présentation de Wirtinger . . . 15
1.5 Nœuds bordants . . . 18

2 Recollements **19**
2.1 Sur la somme amalgamée . . . 19
2.2 Recollement de variétés . . . 20
2.3 Recollement de sphères . . . 22
2.4 Attachement d'anses . . . 23

3 Construction d'un $\mathbf{R^4}$ exotique **25**
3.1 Corps à anses d'un nœud . . . 25
3.2 Régularité du corps à anses . . . 26
3.3 Fin de la construction . . . 27

Introduction

Les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ sont sans doute les espaces vectoriels les plus simples. En effet, si E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, alors E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et lui est donc *homéomorphe*, c'est-à-dire que l'on peut « déformer » continûment l'un en l'autre. Cette notion dépend bien entendu de la topologie des espaces considérés, alors pour quelle topologie sur $\mathbb{R}^n$ cet énoncé est-il correct ? La topologie standard, bien entendu. Mais que se passe-t-il si l'on en considère une autre ? Bien d'étranges phénomènes peuvent se produire, même dans des situations *a priori* très simples. Dans le cas $n = 1$ par exemple, considérons l'ensemble :

$$K = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

La *K-topologie* sur $\mathbb{R}$ est la topologie engendrée par les intervalles ouverts (a, b) et les ensembles de la forme $(a, b) \setminus K$. C'est donc une topologie plus fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. Elle fait de ce dernier un espace connexe mais non connexe par arcs ! Ceci dit, même avec la topologie usuelle, une question bien plus fine subsiste : celle du calcul différentiel. Dans le cas $n = 1$, la notion de *dérivée* d'une fonction est aujourd'hui incontournable en analyse, et on sait également « dériver » des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ via la *différentielle* :

$$\mathrm{d}f_a(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Mais encore une fois, pour quelle structure différentielle sur $\mathbb{R}^n$? Il faut pour cela faire un détour du côté des variétés abstraites. Informellement, une *variété* de dimension n est un espace « ressemblant » localement à $\mathbb{R}^n$. Par exemple, une fourmi se baladant sur la sphère $\mathbb{S}^2$ aurait bien du mal à distinguer ses environs d'une partie du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Dans un voisinage U de n'importe quel point d'une telle variété, on dispose donc d'un *système de coordonnées locales* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, c'est-à-dire d'un homéomorphisme appelé *paramétrisation locale* :

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)). \end{aligned}$$

Une *structure différentielle* sur une variété est essentiellement une façon d'y faire de l'analyse, en se ramenant toujours à $\mathbb{R}^n$ par les paramétrisations locales. Étant donnée une telle application $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ au voisinage d'un point $p \in U$, on peut définir les dérivées partielles d'une fonction lisse f comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\right)(\varphi(p)).$$

Lorsque φ est l'identité, on retrouve la structure différentielle dite *standard* sur $\mathbb{R}^n$. Il est alors légitime de se demander s'il en existe d'autres qui ne lui soient pas *difféomorphes*, c'est-à-dire équivalentes au sens du calcul différentiel. En des termes plus précis, existe-t-il un système de coordonnées locales sur $\mathbb{R}^n$ rendant l'espace obtenu non difféomorphe à sa version standard ? À la difficulté *a priori* monumentale de ce problème vient s'ajouter une obstruction considérable : celle de la dimension. En effet, les structures non standard sur $\mathbb{R}^n$, dites *exotiques*, n'apparaissent qu'à partir de la dimension 4, peu propice à l'intuition [Rad25; Moi52].

Les premières structures exotiques ont été découvertes sur la sphère $\mathbb{S}^7$ par John Milnor en 1956 [Mil56]. Sa construction consiste à recoller deux copies du produit $\mathbb{B}^4 \times \mathbb{S}^3$ sur leurs bords $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ par l'application $(x, y) \longmapsto (x, x^2yx^{-1})$, où $\mathbb{S}^3$ a été identifiée avec la sphère unité des quaternions. La variété obtenue est alors homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^7$, mais ne lui est pas difféomorphe ! Cet exemple déjà un peu tordu est en réalité loin d'être singulier : on sait aujourd'hui qu'il existe 28 structures différentielles sur $\mathbb{S}^7$ [KM63] et même que les seules sphères de dimension impaire dépourvues d'une structure exotique sont $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^5$ et $\mathbb{S}^{61}$ [WX17].

Quid alors de $\mathbb{R}^n$ lorsque $n \geq 4$? Pour $n \geq 5$, l'existence d'une structure exotique a définitivement été réfutée en 1962 [Sta62]. Toute l'étude des structures exotiques sur $\mathbb{R}^n$ se rapporte alors à la dimension 4, peu commode mais déjà plus propice à l'intuition que la dimension 61. Découvertes en 1982 par différents mathématiciens dont Michael Freedman et Frank Quinn [FQ89], on sait aujourd'hui qu'il en existe une infinité non dénombrable [Tau87]. Pour en construire une, on peut par exemple utiliser des nœuds. Des nœuds ?

La notion de *nœud* en mathématiques correspond bien à notre intuition : il s'agit d'un lacet simple plongé dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Un nœud est toujours le bord d'une certaine surface dans $\mathbb{R}^3$, mais il s'agit ici de savoir si c'est le bord d'un disque plongé dans $\mathbb{R}^4$. Lorsque le plongement est simplement topologique (en toute rigueur, une condition supplémentaire est requise), le nœud est dit *topologiquement bordant*, tandis qu'avec un plongement lisse, le nœud est dit *différentiablement bordant*. La différence entre ces deux notions est du même acabit que celle qui distingue les structures topologiques des structures différentielles. En exploitant cette subtilité, on peut ainsi construire un $\mathbb{R}^4$ *exotique*, c'est-à-dire une variété homéomorphe mais non difféomorphe à $\mathbb{R}^4$! Il est cependant difficile de savoir si un nœud est différentiablement bordant ou non. C'était par exemple le cas du nœud suivant, découvert par John Conway (1937–2020) dans les années 1970.

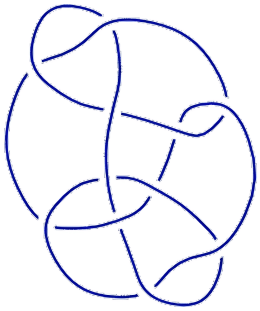


FIGURE 1 – Une représentation du nœud de Conway (tirée de [Atl]).

Ce problème a été résolu en 2018 par la mathématicienne Lisa Piccirillo [Pic20]. Elle a montré que ce nœud n'est pas différentiablement bordant alors qu'il est topologiquement bordant, près de 50 ans après sa découverte par Conway, achevant ainsi la classification des nœuds à moins de 13 croisements. Il reste en fait de nombreuses conjectures non démontrées dans le domaine, et certaines questions sur les structures exotiques des sphères sont même étroitement liées à la conjecture de Poincaré... mais cela nous entraînerait trop loin. Nous présenterons dans cet exposé une construction d'une structure exotique sur $\mathbb{R}^4$ à l'aide de ces nœuds.

Résumé du stage

Le but du stage était de construire un $\mathbb{R}^4$ exotique, en suivant le développement présenté dans le post [Dav]. Cette construction utilisant des nœuds, la première partie du stage a été dédiée à l'étude de quelques aspects de théorie des nœuds. Dans un second temps, il a fallu comprendre avec rigueur les notions et résultats requis pour la construction du $\mathbb{R}^4$ exotique, détaillées notamment dans la section 0. Une fois cela terminé, la construction certes un peu complexe ne consistait plus qu'à assembler tous les résultats obtenus jusqu'ici.

Remerciements

J'adresse mes remerciements les plus chaleureux à mon encadrant de stage, Gérard Besson, pour son accueil, sa disponibilité, ses conseils et ses retours tout au long de mon séjour. J'ai beaucoup appris sur une branche des mathématiques que je n'avais fait qu'effleurer jusqu'à présent et ce fut une entrée en matière vraiment enrichissante. Je remercie également Christine Lescop et Jean-Baptiste Meilhan pour leurs enseignements sur la théorie des nœuds qui m'ont beaucoup aidé à mieux comprendre diverses notions loin d'être triviales (tout particulièrement le polynôme d'Alexander !), ainsi que tout le personnel de l'Institut Fourier pour leur accueil.

Notations et définitions

Espaces de référence

Si X est un espace topologique, son *intérieur* sera noté $\operatorname{Int} X$ et son *bord* sera noté ∂X. Lorsqu'il existe un *homéomorphisme* entre deux espaces topologiques X et Y, c'est-à-dire une bijection $X \to Y$ continue dont la réciproque est également continue, nous écrirons $X \cong Y$. Voici quelques espaces topologiques de référence que nous rencontrerons souvent :

- la *boule (fermée)* de dimension n : $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$,
- la *sphère* de dimension n : $\mathbb{S}^n = \partial\mathbb{B}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$,
- le *demi-espace supérieur (fermé)* : $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$.

Réunion disjointe

La *réunion disjointe* de deux ensembles X et Y sera notée $X \sqcup Y$. Elle est définie formellement par :

$$X \sqcup Y = \{(x, 1) \mid x \in X\} \cup \{(y, 2) \mid y \in Y\}.$$

Si X et Y sont des espaces topologiques, la topologie de $X \sqcup Y$ est définie comme suit : une partie $U \subseteq X \sqcup Y$ est ouverte lorsqu'il existe des ouverts $U_X \subseteq X$ et $U_Y \subseteq Y$ tels que $U = U_X \sqcup U_Y$.

Groupes

L'élément neutre d'un groupe sera par défaut noté 1. Un groupe G peut toujours être décrit par un ensemble de *générateurs* $(x_i)_{i \in I}$ et de *relations* $(r_j)_{j \in J}$ entre ces derniers, appelé *présentation* de G. Nous la noterons :

$$G = \langle (x_i)_{i \in I} \mid (r_j)_{j \in J} \rangle.$$

Par exemple, une présentation du groupe des quaternions est donnée par :

$$\mathrm{Q}_8 = \langle x, y \mid x^4 = 1,\, x^2 = y^2,\, yx = x^{-1}y \rangle.$$

Lorsque deux groupes G et H sont *isomorphes*, nous adopterons la notation $G \cong H$, comme pour les espaces topologiques. Voici trois constructions sur les groupes que l'on rencontre fréquemment en topologie algébrique. La *somme directe* d'une famille de groupes $(G_i)_{i \in I}$ est le groupe défini par :

$$\bigoplus_{i \in I} G_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i \;\middle|\; x_i = 1 \text{ sauf pour un nombre fini de } i \in I \right\}.$$

Le *produit libre* de deux groupes G et H, noté $G \star H$, est le groupe des mots réduits[1] sur l'alphabet $G \cup H$. Cette notion se généralise par récurrence à une famille quelconque de groupes. Enfin, le *produit libre amalgamé* de G et H le long de deux morphismes de groupes $f_G : F \to G$ et $f_H : F \to H$, noté $G \star_F H$, correspond au produit libre $G \star H$ dans lequel on ajoute la relation $f_G(x) = f_H(x)$ pour chaque $x \in F$.

Groupe fondamental, groupes d'homologie

Le *groupe fondamental* d'un espace topologique pointé (X, x) sera noté $\pi_1(X, x)$. Il s'agit de l'ensemble des lacets de X basés en x quotienté par la relation d'homotopie à extrémités fixées. Lorsque X est connexe par arcs, alors pour tous $x, x' \in X$, les groupes $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, x')$ sont isomorphes, et seront alors tous deux notés $\pi_1(X)$. Enfin, le *groupe d'homologie*[2] en degré n à coefficients entiers de X sera noté $H_n(X)$, et nous noterons $X \simeq X'$ lorsque deux espaces topologiques X et X' ont le même type d'homotopie.

[1] Pour *réduire un mot*, on supprime les occurrences des éléments neutres et on remplace une succession de deux éléments appartenant au même groupe par leur produit. En faisant cela, on supprime en particulier les termes de la forme xx^{-1}. Tout mot réduit sur l'alphabet $G \cup H$ est alors une alternance d'éléments de G et d'éléments de H.

[2] Les groupes d'homologie singulière et d'homologie cellulaire étant isomorphes, nous nous affranchirons de cette distinction.

0 Préliminaires

0.1 Variétés topologiques, variétés différentielles

Définition 0.1. *Soient M un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$. On dit que M est une* variété topologique *de dimension n lorsque :*

(i) *M est séparé ;*

(ii) *M possède une base dénombrable d'ouverts ;*

(iii) *tout point de M admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (ou un ouvert de $\mathbb{R}^n$).*

Pour tout $x \in M$, on dispose donc d'un ouvert $U_x \subseteq M$ contenant x et d'un homéomorphisme $\varphi_x : U_x \to \mathbb{R}^n$. Le couple (U_x, φ_x) est alors appelé *carte locale* sur M. Une famille de cartes locales $((U_i, \varphi_i))_{i\in I}$ sur M est appelée *atlas* lorsque les ouverts U_i forment un recouvrement de M. Enfin, un tel atlas est dit *lisse* lorsque pour tous $i, j \in I$ tels que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, les *applications de transition* ou *changements de cartes*, définis par[3] :

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

sont des difféomorphismes, c'est-à-dire des applications bijectives et *lisses* (de classe $\mathscr{C}^\infty$), de réciproque lisse.

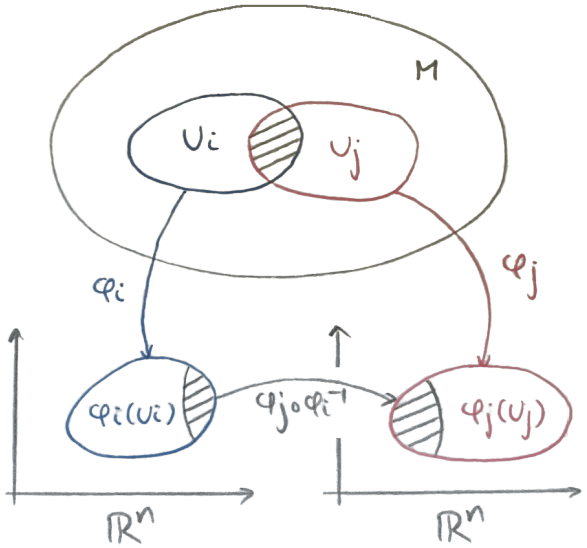


FIGURE 2 – Une variété topologique M avec deux cartes locales (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j).

Deux atlas lisses sont dits *compatibles* lorsque leur réunion est encore un atlas lisse. La compatibilité est une relation d'équivalence, dont les classes d'équivalence sont appelées *structures différentielles* sur M.

Définition 0.2. *Une* variété différentielle *est une variété topologique munie d'une structure différentielle.*

La sphère $\mathbb{S}^n$ est une variété différentielle, dont la structure dite « standard » est donnée par un atlas lisse à deux cartes. Notons $N = (0, \ldots, 0, 1)$, $S = (0, \ldots, 0, -1)$ et définissons la *projection stéréographique* :

$$\begin{aligned} \varphi_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) &\longmapsto \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 - x_{n+1}} \end{aligned}$$

[3] Ce sont toujours des homéomorphismes en tant que composés d'homéomorphismes, c'est le caractère lisse qui sera important.

ainsi que $\varphi_S(x) = -\varphi_N(-x)$ pour $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. Géométriquement, la carte φ_N (resp. φ_S) associe à $x \in \mathbb{S}^n$ distinct de N (resp. S) le point d'intersection entre la droite reliant x et N (resp. S) et l'hyperplan $x_{n+1} = 0$.

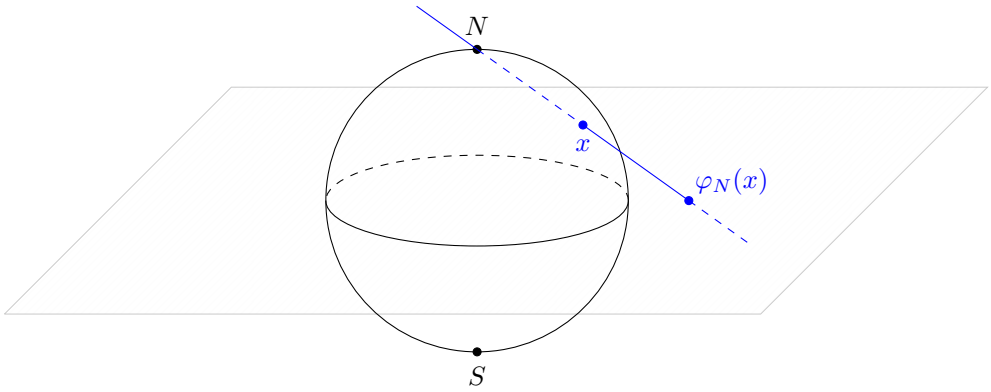


FIGURE 3 – La sphère $\mathbb{S}^n$ et la projection stéréographique d'un point $x \in \mathbb{S}^n$.

Dorénavant, sur des variétés topologiques ou différentielles, le terme « atlas » signifiera toujours « atlas lisse ».

Définition 0.3. *Soient M, N deux variétés différentielles et $f : M \to N$. On dit que f est* lisse *lorsque pour tout $x \in M$, pour tout $i \in I$ tel que $x \in U_i$, pour tout $j \in J$ tel que $f(x) \in V_j$, l'application :*

$$\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j)) \to \psi_j(f(U_i) \cap V_j)$$

est lisse, et ce pour tout atlas $((U_i, \varphi_i))_{i\in I}$ sur M et tout atlas $((V_j, \psi_j))_{j\in J}$ sur N.

Cette définition est en fait indépendante des atlas considérés.[4] Comme pour les applications à valeurs réelles, on dit qu'une telle fonction f est un *difféomorphisme* lorsque c'est une bijection lisse, de réciproque lisse.

0.2 Variétés à bord

Les définitions 0.1 et 0.2 correspondent en réalité à des variétés dites *sans bord*. En remplaçant le point (iii) dans la définition 0.1 par :

« tout point de M admet un voisinage homéomorphe à (un ouvert de) $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$ »

on obtient la notion de *variété à bord*. Le *bord* d'une telle variété M est alors défini par :

$$\partial M = \{x \in M \mid \varphi(x) \in \partial\mathbb{H}^n \text{ pour une certaine carte locale } (U, \varphi) \text{ sur } M\}$$

et on conviendra qu'il n'est jamais vide lorsqu'on mentionne explicitement qu'il s'agit d'une variété à bord. Cette définition dépend a priori de la carte locale. Il pourrait en effet exister deux cartes (U, φ) et (V, ψ) pour lesquelles $\varphi(x) \in \partial\mathbb{H}^n$ et $\psi(x) \in \operatorname{Int}\mathbb{H}^n$. Heureusement, cela ne se produit jamais[5] ce qui nous permet de définir l'ensemble des *points intérieurs* de M comme suit[6] :

$$\operatorname{Int} M = M \setminus \partial M = \{x \in M \mid \varphi(x) \in \operatorname{Int}\mathbb{H}^n \text{ pour toute carte locale } (U, \varphi) \text{ sur } M\}.$$

Les structures différentielles sur les variétés à bord sont alors définies de manière analogue, en considérant qu'une fonction définie sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{H}^n$ est lisse lorsqu'elle est la restriction d'une fonction lisse (au sens de la définition 0.3) à un ouvert $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que $U \subseteq V$. Notons que cet ajustement permet ne précise pas pour le moment la structure du bord en tant que variété « intrinsèque ». Nous évoquerons cela dans la section 0.4.

[4] Elle dépend cependant des classes d'équivalence des atlas, c'est-à-dire des structures différentielles dont sont munies M et N.
[5] Voir [Lee11] (théorème 2.59) pour les variétés topologiques, et [Lee12] (théorème 1.37) pour les variétés différentielles.
[6] On peut montrer que $\operatorname{Int} M$ est alors une sous-variété topologique sans bord de dimension n de M (cf. section 0.4).

Proposition 0.4. *Soit M une variété topologique à bord de dimension $n \geq 1$. Alors ∂M est une variété topologique sans bord de dimension $n-1$.*

Démonstration. Puisque M est séparé, ∂M l'est aussi. De plus, les ouverts de ∂M pour la topologie induite sont exactement les intersections de ∂M avec des ouverts de M. Par conséquent, comme M possède une base dénombrable d'ouverts, ∂M également. Considérons enfin $x \in \partial M$. On peut trouver un ouvert $U \subseteq M$ contenant x et un homéomorphisme $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$. Définissons l'ouvert :

$$V = U \cap \partial M \subseteq \partial M$$

de sorte que, par définition de ∂M :

$$\varphi(V) = \{\varphi(u) \mid u \in U \text{ et } \varphi(u) \in \partial\mathbb{H}^n\} = \varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n = \partial\mathbb{H}^n.$$

On obtient donc un homéomorphisme $\varphi^{-1}(V) \to V$, et on sait que $\partial\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Tout point de ∂M possède donc un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$. □

0.3 Équivalence de structures différentielles

Notons que la notion de difféomorphisme vue dans la section précédente dépend entièrement des structures différentielles sur les variétés considérées, puisque l'on passe toujours par les atlas pour définir le caractère lisse. Voyons d'abord comment transporter la structure différentielle d'une variété à une autre. Pour cela, on pourrait penser qu'un difféomorphisme est nécessaire, mais il n'en est rien.

Proposition 0.5. *Soient M une variété topologique munie d'un atlas $\mathcal{A} = ((U_i, \varphi_i))_{i\in I}$, N une variété topologique, et $\rho : M \to N$ un homéomorphisme. Alors :*

$$\rho(\mathcal{A}) = ((\rho(U_i), \varphi_i \circ \rho^{-1}))_{i\in I}$$

est un atlas sur N.

Démonstration. Pour tous $i, j \in I$ tels que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$:

$$\varphi_j \circ \rho^{-1} \circ (\varphi_i \circ \rho^{-1})^{-1} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$$

et cette application est lisse puisque $\mathcal{A}$ est un atlas. □

Définition 0.6. *Soit M une variété topologique. Deux structures différentielles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sur M sont dites* équivalentes *lorsqu'il existe un difféomorphisme $f : M \to M$ tel que pour tout atlas $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$, $f(\mathcal{A}) \in \mathcal{T}$.*

Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des atlas maximaux, la condition se réécrit simplement $f(\mathcal{S}) = \mathcal{T}$. Pour classifier les structures différentielles sur certaines variétés, il nous faut également introduire les notions d'*homotopie* et d'*isotopie*.

Définition 0.7. *Soient X, Y deux espaces topologiques, $f, g : X \to Y$, $h : X \times [0,1] \to Y$ des applications continues. On dit que h est une* homotopie *entre f et g lorsque :*

(i) *$h(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in X$;*

(ii) *$h(x, 1) = g(x)$ pour tout $x \in X$.*

Si l'application $x \longmapsto h(x, t)$ est un homéomorphisme pour tout $t \in [0, 1]$, on dit que h est une isotopie.

On note alors $h_0 = f$ et $h_1 = g$. Informellement, deux applications sont homotopes lorsque l'on peut déformer continûment l'une en l'autre. Pour des chemins, on recontre également la notion d'*homotopie à extrémités fixées*, qui impose que les applications $t \longmapsto h(0, t)$ et $t \longmapsto h(1, t)$ soient constantes.

Il existe des homotopies qui ne sont pas des isotopies. Par exemple, l'identité de l'intervalle $[-1,1]$ et son opposé sont homotopes, via l'application :

$$\begin{aligned}[-1,1]\times[0,1] &\longrightarrow [-1,1]\\ (x,t) &\longmapsto x(1-2t)\end{aligned}$$

mais elles ne sont pas isotopes, puisqu'une telle isotopie devrait permuter les extrémités de l'intervalle.

Nous sommes désormais en mesure d'énoncer les deux théorèmes qui seront d'une importance inégalée dans la construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique, consistant à recoller deux variétés de dimension 4 sur leurs bords. Leurs démonstrations sont très loin d'être évidentes et nécessitent des résultats bien au-delà du niveau de cet exposé.

Théorème 0.8. *Toute variété topologique de dimension 4 connexe et non compacte admet une structure différentielle.*

Démonstration. Détaillée dans [FQ89], pp. 116–117. □

Théorème 0.9. *Soient M, N deux variétés différentielles de dimension 3. On suppose qu'il existe un homéomorphisme $h : M \to N$. Alors h est isotope à un difféomorphisme $M \to N$. En particulier, les structures différentielles de M et N sont équivalentes.*

Démonstration. Détaillée dans [Moi52] (théorèmes 3 et 4) et [HM74] (théorème 4.2). □

0.4 Plongements et sous-variétés

Afin de définir les sous-variétés, nous devons étudier la régularité des applications permettant d'inclure une variété dans une autre. Les *plongements topologiques* en sont les plus simples.

Définition 0.10. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $\rho : X \to Y$. On dit que ρ est un* plongement (topologique) *lorsque ρ induit un homéomorphisme $X \to \rho(X)$.*

Définition 0.11. *Soient M, N deux variétés topologiques de dimensions respectives m et n où $m < n$, et $\rho : M \to N$ un plongement. On dit que ρ est* plat *lorsqu'il se prolonge en un plongement $M \times \mathbb{B}^{n-m} \to N$.*

Cela correspond à l'existence d'un *voisinage tubulaire* pour $\rho(X)$, c'est-à-dire que l'on peut épaissir cet espace pour lui donner la dimension de M. Par exemple, un voisinage tubulaire du cercle $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^3$ est homéomorphe au tore plein $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$, de dimension 3. Nous sommes désormais en mesure de définir la notion de *sous-variété*.

Définition 0.12. *Soient M une variété topologique et N un sous-espace topologique de M. On dit que N est une* sous-variété topologique *de M lorsque N est une variété topologique pour la topologie induite, et que l'inclusion $N \hookrightarrow M$ est un plongement localement plat.*

Il existe une définition « intrinsèque » des sous-variétés[7] : si M est une variété (topologique) de dimension n, N est un sous-espace topologique de M et $k \in \{0, \dots, n\}$, on dit que N est une sous-variété (topologique) de M de dimension k lorsque pour tout $x \in N$, il existe une carte locale (U, φ) sur M telle que :

(i) $x \in U$;

(ii) $\varphi(x) = 0$;

(iii) $\varphi(N \cap U) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \cap \varphi(U)$.

Par exemple, la sphère $\mathbb{S}^n$ est une sous-variété topologique de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$.

[7] C'est généralement celle qu'on donne en premier pour $\mathbb{R}^n$ avant d'introduire les variétés « abstraites ».

Proposition 0.13. *Soient M, N deux variétés topologiques de dimension respectives m et n où $m < n$, et $\rho : X \to Y$ un plongement. Alors $\rho(M)$ est une sous-variété topologique de dimension m de N.*

Démonstration. Le caractère séparé et l'existence d'une base dénombrable de voisinages pour $\rho(M)$ sont clairs. Par ailleurs, si $y = \rho(x) \in \rho(M)$ et (U, φ) est une carte locale sur M telle que $x \in U$, alors $(\rho(U), \varphi \circ \rho^{-1})$ est une carte locale sur N vérifiant $y \in \rho(U)$, comme on l'a vu dans la proposition 0.5. □

Afin de définir proprement les plongements lisses, nous devons brièvement évoquer la notion de *différentielle* pour des fonctions définies sur des variétés et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.[8] Considérons une variété différentielle M et un point $x \in M$, ainsi qu'une carte locale (U, φ) telle que $x \in U$. Deux courbes $\gamma_1, \gamma_2 : (-1, 1) \to M$ telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ sont dites équivalentes lorsque :

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0).$$

Ceci définit une relation d'équivalence sur les courbes, dont les classes d'équivalences sont appelées *vecteurs tangents* à M en x. Leur ensemble, appelé *espace tangent* à M en x, ne dépend pas de (U, φ) et est noté T_xM.

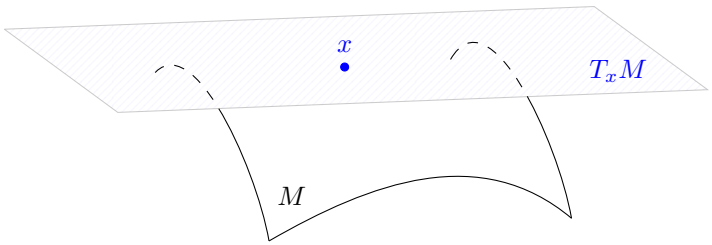


FIGURE 4 – Une variété M et l'espace tangent T_xM en un point $x \in M$.

Si $p = \gamma(0) \in T_xM$ et $f : M \to \mathbb{R}^n$ est une fonction lisse, la *différentielle* de f en x est alors définie par :

$$\mathrm{d}f_x(p) = (f \circ \gamma)'(0).$$

Définition 0.14. *Soient M une variété différentielle et $\rho : M \to \mathbb{R}^n$. On dit que ρ est un* plongement lisse *ou une* immersion *lorsque c'est un plongement topologique, lisse, et tel que sa différentielle $\mathrm{d}\rho_x$ soit injective pour tout $x \in M$.*

Définition 0.15. *Soient M une variété différentielle et N un sous-espace topologique de M. On dit que N est une* sous-variété différentielle *de M lorsque N est une variété différentielle pour la topologie induite, et que l'inclusion $N \hookrightarrow M$ est une immersion.*

Un théorème dû à Whitney affirme que toute variété différentielle de dimension n se plonge dans $\mathbb{R}^{2n}$.[9]

Proposition 0.16. *Soient X, Y deux espaces topologiques, Z un sous-espace topologique de X et $\rho : Z \to Y$ un plongement. Alors ρ induit un homéomorphisme $\partial Z \to \partial\rho(Z)$.*

Démonstration. Si $z = \rho(x) \in \rho(\partial Z)$, alors tout voisinage de x dans X intersecte Z ainsi que $X \setminus Z$. De plus, si V est un voisinage de z dans $\rho(X)$, alors $\rho^{-1}(V)$ est un voisinage de $\rho^{-1}(z) = x$ dans X, donc :

$$\rho^{-1}(V) \cap Z \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \rho^{-1}(V) \cap (X \setminus Z) \neq \varnothing$$

c'est-à-dire, par injectivité de ρ :

$$\rho(\rho^{-1}(V) \cap Z) = V \cap \rho(Z) \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \rho(\rho^{-1}(V) \cap (X \setminus Z)) = V \cap \rho(X \setminus Z) \neq \varnothing.$$

[8] Cette partie sur laquelle nous passons très vite serait davantage détaillée dans un véritable cours de géométrie différentielle.
[9] La dimension $2n$ à l'arrivée est optimale. Elle est atteinte pour les espaces projectifs dont la dimension est une puissance de 2.

Enfin, $\rho(X \setminus Z) = \rho(X) \setminus \rho(Z)$ puisque ρ est un homéomorphisme. Par conséquent, si $W \subseteq Y$ est un voisinage de $z \in \rho(\partial Z)$, alors :

$$W \cap \rho(Z) \neq \varnothing \quad \text{et} \quad W \cap (\rho(X) \setminus \rho(Z)) \neq \varnothing$$

d'où $\rho(\partial Z) \subseteq \partial\rho(Z)$, et l'inclusion réciproque est analogue. Ainsi, ρ induit un homéomorphisme $\partial Z \to \partial\rho(Z)$ par restriction et corestriction. □

Définition 0.17. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$. On dit que f est* propre *lorsque pour tout compact K de Y, $f^{-1}(K)$ est un compact de X.*

Proposition 0.18. *Soit M une variété différentielle à bord de dimension $n \geq 1$. Alors ∂M est une variété différentielle sans bord de dimension $n-1$, pour laquelle l'inclusion $\partial M \hookrightarrow M$ est propre.*

Démonstration. Détaillée dans [Lee12] (théorème 5.11). □

0.5 Connexité des variétés

Rappelons que la connexité est une notion plus faible que la connexité par arcs. Par exemple, le graphe :

$$\left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) \;\middle|\; x \in (0, \infty) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

est connexe mais non connexe par arcs. Notons que la définition 0.1 n'impose pas à une variété topologique d'être connexe. La réunion disjointe de deux sphères de même dimension est donc une variété ! L'hypothèse sur la dimension n'est toutefois pas négligeable, car cet énoncé deviendrait faux si on l'omettait.[10] Nous allons voir que la connexité est en fait équivalente à la connexité par arcs pour les variétés.

Lemme 0.19. *Soit X un espace topologique. Si X est connexe et localement connexe par arcs, alors X est connexe par arcs.*

Démonstration. Si $X = \varnothing$, c'est évident... Sinon, fixons $p \in X$ et montrons que l'ensemble :

$$C = \{x \in X \mid x \text{ est relié à } p\}$$

est un ouvert fermé non vide de X. D'abord, $C \neq \varnothing$ car $p \in C$. Puisque X est localement connexe par arcs, tout point $x \in X$ possède en particulier un voisinage ouvert $U \subseteq X$ connexe par arcs. Maintenant :

- si $x \in C$, alors tout point de U est relié à p puisque U est connexe par arcs ;
- si $x \in X \setminus C$, alors aucun point de U n'est relié à p (sinon x le serait par transitivité).

Par conséquent, C et $X \setminus C$ sont ouverts. Comme $C \neq \varnothing$ et X est connexe, on obtient $X = C$. □

Proposition 0.20. *Soit M une variété topologique. Si M est connexe, alors M est connexe par arcs.*

Démonstration. Une variété topologique est par définition[11] localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, donc localement connexe par arcs. Le lemme 0.19 permet de conclure. □

[10] Ce que l'on a appelé jusqu'à présent *la* dimension d'une variété est en fait bien défini en vertu du théorème de Brouwer, qui stipule que $\mathbb{R}^m$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, $m = n$.

[11] La nuance est la même que dans la note précédente, mais ces deux notions sont en fait équivalentes ici. En effet, si (U, φ) est une carte locale associée à $x \in M$, on peut ramener les boules de centre $\varphi(x)$ et de rayon arbitrairement petit dans M à l'aide de l'homéomorphisme φ^{-1} pour construire une base de voisinages de x.

0.6 La sphère de dimension 3

Nous avons vu dans la section 0.1 que la projection stéréographique donnait un difféomorphisme :

$$\mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n.$$

Réciproquement, la sphère $\mathbb{S}^n$ correspond à la compactification d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}.$$

S'il est aisé de visualiser les sphères de dimension inférieure à 2 de cette manière, les choses se compliquent à partir de la dimension 3, puisque la sphère $\mathbb{S}^3$ est une partie de $\mathbb{R}^4$ qui ne peut être immergée dans $\mathbb{R}^3$. En fait, tous les nœuds que nous rencontrerons par la suite seront toujours des parties de $\mathbb{S}^3$, ce qui nous demande de comprendre un peu sa structure. Comme c'est une partie de $\mathbb{R}^4$, elle est homéomorphe à une partie de $\mathbb{C}^2$:

$$\mathbb{S}^3 = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\right\} \cong \left\{|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\right\}$$

ce qui permet de la représenter comme la réunion des deux espaces :

$$T_1 = \left\{|z_1|^2 \leq 1/2,\, |z_2|^2 = 1 - |z_1|^2\right\} \quad \text{et} \quad T_2 = \left\{|z_1|^2 \geq 1/2,\, |z_2|^2 = 1 - |z_1|^2\right\}$$

tous deux homéomorphes au tore plein (fermé) $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$! De plus :

$$T_1 \cap T_2 = \left\{|z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{1}{2}\right\}.$$

Ainsi, la sphère $\mathbb{S}^3$ est la réunion de deux tores pleins, dont les *parallèles* du premier ont été identifiés avec les *méridiens* du second. Les deux notions sont illustrées ci-dessous.

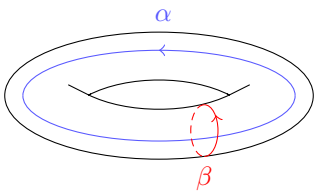


FIGURE 5 – Le tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ avec un parallèle α et un méridien β.

Le complémentaire d'un tore plein (fermé) non noué[12] dans $\mathbb{S}^3$ est donc encore un tore plein (ouvert) !

[12] Comme nous aurons l'occasion de le voir dans les sections suivantes, tout dépend du plongement !

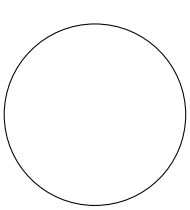
1 Nœuds

1.1 Définitions et exemples

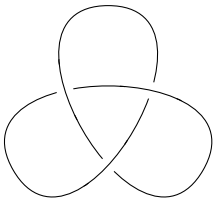
Définition 1.1. *Soit X un espace topologique. Un* nœud *tracé dans X est un sous-espace topologique de X homéomorphe à une sphère. Un* entrelacs *dans X est une réunion disjointe de nœuds tracés dans X.*

On peut également définir un nœud comme un plongement topologique d'une sphère dans X, ce qui revient à confondre l'application et son image. Ces définitions se veulent les plus générales possibles, mais nous ne rencontrerons que des nœuds ou des entrelacs dans $\mathbb{S}^3$. Ainsi, dans toute la suite, nous considérerons que :

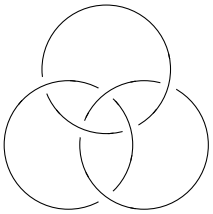
« nœud » = « sous-espace topologique de $\mathbb{S}^3$ homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ » ou « plongement topologique $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3$ ».



Nœud trivial K_0



Nœud de trèfle $K_{2,-3}$



Anneaux borroméens

Le nœud de trèfle est un nœud dit *torique*. Ces nœuds correspondent à l'application K_{pq} définie par :

$$K_{pq}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \begin{pmatrix} (2+\cos(q\theta))\cos(p\theta) \\ (2+\cos(q\theta))\sin(p\theta) \\ -\sin(q\theta) \end{pmatrix}$$

où p et q sont deux entiers premiers entre eux, condition importante pour éviter les auto-intersections [Lin14].

En réalité, la définition formelle d'un nœud correspond bien à l'intuition que l'on s'en fait : un lacet simple tracé dans l'espace. Cependant, comme souvent en topologie, des exemples pathologiques peuvent apparaître lorsque l'on impose peu de contraintes aux objets, ce qui motive la définition suivante.[13]

Définition 1.2. *Un nœud K est dit* régulier *lorsque le plongement associé à K est plat.*

En vertu de la définition 0.11, le nœud $K : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3$ est donc régulier lorsqu'il se prolonge en un plongement topologique $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^3$. Un tel nœud admet donc un *voisinage tubulaire*, c'est-à-dire que l'on peut l'épaissir légèrement. On pourrait penser que cette condition est superflue et que cela est toujours possible quel que soit le nœud, mais c'est sans compter sur les nœuds dits *sauvages*, non réalisables par des lignes brisées finies.

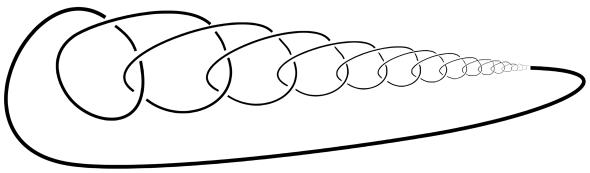


FIGURE 6 – Un nœud sauvage (tirée de [Wik]).

Les nœuds que nous considérerons dans la suite seront globalement tous réguliers. Ils possèderont également un nombre fini d'*arcs* et de *croisements*. Là encore, ces notions correspondent à notre intuition, et il en existe plusieurs définitions qui les formalisent de manière assez simple, mais qui peuvent aussi nous entraîner bien loin dans la théorie.[14] Nous nous intéresserons aux arcs plus tard dans l'exposé. Pour les croisements, nous

[13] Un exemple bien connu est celui de la courbe de Peano, qui remplit le carré avec un simple chemin continu.
[14] Pour les représentations de nœuds par des diagrammes, on peut citer le théorème sur les *mouvements de Reidemeister*.

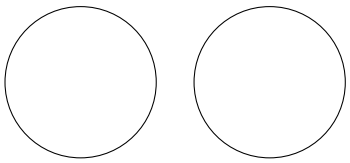
adopterons la définition suivante : si $p : K \to \mathbb{R}^2$ est une projection régulière[15] du nœud K dans le plan euclidien, un *croisement* dans K correspond à un point $x \in \mathbb{R}^2$ dont la fibre $p^{-1}(x)$ contient deux points.

1.2 Invariants de nœuds

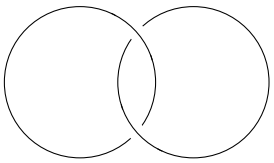
Comme souvent en mathématiques, pour distinguer des objets, on s'intéresse à des *invariants*, c'est-à-dire des propriétés conservées après certaines transformations. Ceux que nous étudierons ici seront des invariants de nœuds, c'est-à-dire des propriétés topologiques invariantes par isotopie. Deux nœuds qui ne partagent pas les mêmes invariants ne seront alors pas *équivalents*, au sens suivant.

Définition 1.3. *Soient K et K' deux nœuds ou entrelacs. On dit que K et K' sont* équivalents *lorsqu'il existe une isotopie $h : \mathbb{S}^3 \times [0,1] \to \mathbb{S}^3$ telle que h_0 soit l'application identité, et $h_1(K) = K'$.*

Comme pour démontrer qu'une sphère n'est pas homéomorphe à un tore, des outils plus sophistiqués qu'on ne le croirait vont nous être requis. Voici par exemple deux entrelacs non équivalents.



Réunion disjointe de cercles L_D



Entrelacs de Hopf L_H

On sent bien qu'il est impossible de dénouer L_H en L_D, mais une preuve formelle semble hors de portée sans topologie algébrique ! Un invariant incontournable de la sorte est le groupe fondamental du complémentaire d'un nœud ou d'un entrelacs. Si K est un nœud régulier, on peut en considérer un voisinage tubulaire $V(K)$ dans $\mathbb{R}^3$ ou dans $\mathbb{S}^3$, ce qui donne une rétraction forte par déformation :

$$\mathbb{S}^3 \setminus V(K) \twoheadrightarrow \mathbb{S}^3 \setminus K. \tag{1.4}$$

En particulier, les deux espaces ont le même type d'homotopie. Prudence cependant, on ne peut pas mélanger les espaces de référence ! Si $V_{\mathbb{R}^3}(K)$ (resp. $V_{\mathbb{S}^3}(K)$) est un voisinage tubulaire de K dans $\mathbb{R}^3$ (resp. dans $\mathbb{S}^3$), alors en général, les complémentaires n'ont pas le même type d'homotopie :

$$\mathbb{R}^3 \setminus V_{\mathbb{R}^3}(K) \not\simeq \mathbb{S}^3 \setminus V_{\mathbb{S}^3}(K).$$

Il n'y a pas à chercher bien loin pour obtenir un contre-exemple : rien que pour le nœud trivial, $\mathbb{R}^3 \setminus V_{\mathbb{R}^3}(K_0)$ a le type d'homotopie du *bouquet* de la sphère $\mathbb{S}^2$ avec le cercle $\mathbb{S}^1$, tandis que $\mathbb{S}^3 \setminus V_{\mathbb{S}^3}(K_0)$ s'identifie à un tore plein ouvert, comme nous l'avons vu dans la section 0.6. Par conséquent :

$$H_2(\mathbb{R}^3 \setminus V_{\mathbb{R}^3}(K_0)) \cong \mathbb{Z} \quad \text{mais} \quad H_2(\mathbb{S}^3 \setminus V_{\mathbb{S}^3}(K_0)) = \{0\}.$$

Montrons avant tout que le groupe fondamental en question est bien un invariant de nœuds.

Proposition 1.5. *Soient K et K' deux nœuds. Si K et K' sont équivalents, alors :*

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) \cong \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K').$$

Démonstration. Si h est une isotopie entre K et K', alors $h_1 : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ est un homéomorphisme par lequel l'image de K est K'. Par conséquent, h_1 induit un homéomorphisme entre $\mathbb{S}^3 \setminus K$ et $\mathbb{S}^3 \setminus K'$. □

[15] Une projection est dite *régulière* lorsque ses fibres sont de cardinal au plus deux. On peut montrer qu'il existe toujours au moins un nœud équivalent à K qui possède une projection régulière.

Avant de revenir sur l'exemple précédent, notons que du point de vue du groupe fondamental, il importe peu de considérer $\mathbb{R}^3 \setminus K$ ou $\mathbb{S}^3 \setminus K$ comme le montre le lemme suivant [Rol76].

Lemme 1.6. *Soient $n \geq 3$ un entier, B une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathbb{R}^n \setminus B$ soit connexe par arcs. Alors il existe un isomorphisme de groupes :*

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus B) \cong \pi_1(\mathbb{S}^n \setminus B).$$

Démonstration. Puisque $\mathbb{S}^n$ est une variété de dimension n, on peut y considérer un voisinage U de l'infini homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, et tel que $U \cap B = \varnothing$ car B est bornée. En particulier, U est simplement connexe, et :

$$U \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) = U \cap \mathbb{R}^n = U \setminus \{\infty\} \cong \mathbb{S}^{n-1}$$

donc $U \cap (\mathbb{R}^n \setminus B)$ est également simplement connexe, puisque $n \geq 3$. Enfin :

$$\mathbb{S}^n \setminus B = U \cup (\mathbb{R}^n \setminus B)$$

puis on conclut par le théorème de van Kampen. □

Corollaire 1.7. *Si K est un nœud, alors il existe un isomorphisme de groupes :*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K).$$

Démonstration. La compacité de $\mathbb{S}^1$ et la continuité du plongement associé à K font de ce dernier une partie compacte de $\mathbb{R}^3$, donc en particulier bornée. Le lemme 1.6 permet de conclure. □

Nous sommes désormais en mesure de réfuter l'équivalence des entrelacs L_D et L_H. En effet :

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L_D) \cong \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L_H) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

et le produit libre $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ n'est pas abélien, contrairement à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Le groupe fondamental du complémentaire du nœud trivial est clairement isomorphe à $\mathbb{Z}$, étant engendré par n'importe quel lacet simple entourant le nœud. Calculons celui du nœud torique K_{pq}. Géométriquement, sur la surface d'un tore T, le nœud K_{pq} effectue p tours le long du méridien et q tours le long du parallèle.

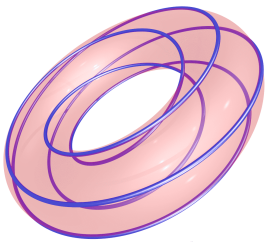


FIGURE 7 – Le nœud $K_{2,5}$ sur un tore (tirée de [Ric]).

Considérons les ouverts $U = T \setminus K_{pq}$ et $V = \mathbb{S}^3 \setminus T$. Ce sont des espaces connexes par arcs, vérifiant :

$$U \cup V = \mathbb{S}^3 \setminus K_{pq} \quad \text{et} \quad U \cap V = \partial T \setminus K_{pq}.$$

En particulier :

$$\pi_1(U) = \langle \alpha \rangle \cong \mathbb{Z} \quad ; \quad \pi_1(V) = \langle \beta \rangle \cong \mathbb{Z} \quad ; \quad \pi_1(U \cap V) = \langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}$$

où $\gamma = \alpha^p = \beta^q$ dans $\pi_1(U \cap V)$, puisque γ réalise p tours le long du méridien et q tours le long du parallèle, donc par le théorème de van Kampen :

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{pq}) \cong \langle x, y \mid x^p = y^q \rangle. \tag{1.8}$$

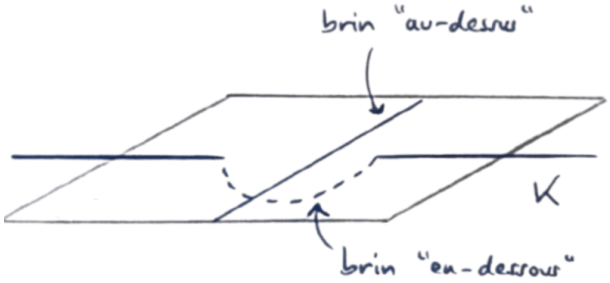
Lorsque p et q sont différents de 1 et -1, le nœud K_{pq} n'est donc pas équivalent au nœud trivial, puisque ce groupe n'est pas abélien. En ajoutant la relation $x^p = 1$ à la présentation, on obtient en effet le produit libre :

$$\mathbb{Z}/p \star \mathbb{Z}/q = \langle x, y \mid x^p = y^q = 1 \rangle$$

ce qui montre que $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{pq})$ possède un sous-groupe non abélien. Nous allons voir que cette démarche de calcul du groupe fondamental se généralise à tout nœud qui comporte un nombre fini de croisements.

1.3 Arcs et orientations

Les sections suivantes requièrent de définir proprement la notion d'*arcs*. Nous avons vu que l'on pouvait projeter un nœud K sur le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Nous considérons cette fois une projection $K \to \mathbb{R}^3$, l'image de K étant incluse dans le plan $z = 0$ sauf près des croisements, où près de chaque point correspondant, une partie de K descend dans l'espace $-\varepsilon \leq z \leq 0$, pour $\varepsilon > 0$ quelconque. Cela nous permet de distinguer les brins qui passent « au-dessus » des autres. Un *arc* de K est donc une partie connexe de K incluse dans le plan $z = 0$. Remarquons qu'un nœud possède toujours autant d'arcs que de croisements.

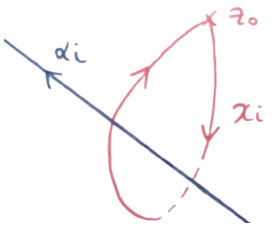


Nous avons également évité les questions d'orientation jusqu'à présent. Elles ne sont pas essentielles dans notre construction, mais voici tout de même une définition classique. Nous dirons qu'une variété différentielle M est *orientable* lorsque le déterminant jacobien de chaque application de transition sur M est strictement positif.[16] Par exemple, une sphère est toujours orientable, tandis qu'un ruban de Möbius ne l'est pas, puisqu'après un tour à partir d'un point donné sur le ruban, on y obtiendrait deux orientations contraires.

Une *orientation* d'un nœud K correspond simplement au choix d'un signe sur le cercle associé, indiquant simplement dans quel sens il est parcouru. Cela permet de donner un ordre aux arcs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de K, et nous dirons alors que l'orientation de K est compatible avec cet ordre lorsque chaque arc α_i suit α_{i-1} (modulo n).

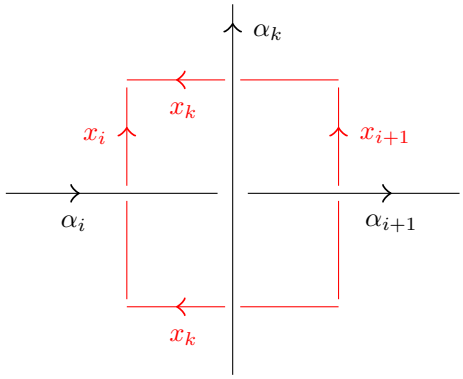
1.4 Présentation de Wirtinger

Nous exposons dans cette section, qui s'inspire très largement de [Rol76], une méthode pour calculer le groupe fondamental du complémentaire d'un nœud. Considérons un nœud K d'arcs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, orienté de manière compatible avec la numérotation des arcs. Fixons $z_0 \in \mathbb{S}^3 \setminus V(K)$ et traçons n lacets $x_1, \ldots, x_n$ basés en z_0 orientés comme suit.

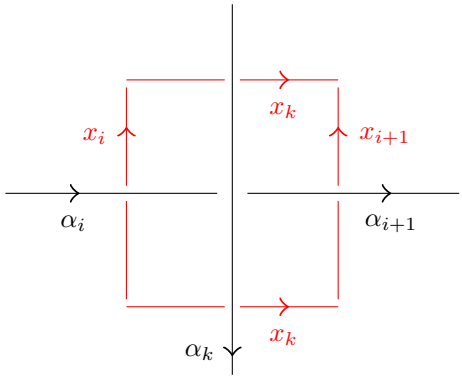


[16] Cette définition s'étend aux variétés topologiques : une telle variété M est dite *orientable* lorsque le groupe de cohomologie $H^1(M; \mathbb{Z}/2)$ est trivial. Si M est compacte, sans bord et de dimension n, alors ce groupe est toujours isomorphe à $H_{n-1}(M; \mathbb{Z}/2)$ par dualité de Poincaré. On retrouve par exemple la non-orientabilité du plan projectif, car $H_1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$.

Au niveau de chaque croisement, deux possibilités se présentent pour les x_i et donnent lieu à une relation de conjugaison r_i entre ces derniers.



$r_i : x_k x_i = x_{i+1} x_k$



$r_i : x_k x_{i+1} = x_i x_k$

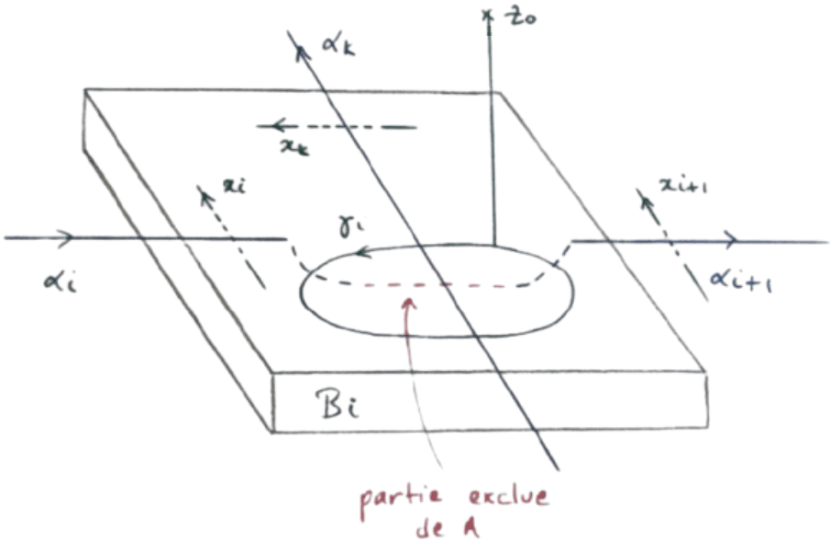
Ces relations décrivent en fait entièrement le groupe fondamental du complémentaire de $V(K)$.

Théorème 1.9. *Soit K un nœud d'arcs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ autour desquels sont tracés des lacets $x_1, \dots, x_n$ orientés convenablement, et reliés par des relations de conjugaisons $r_1, \dots, r_n$. Alors :*

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus V(K)) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle.$$

De plus, on peut toujours omettre l'une des relations r_i.

Démonstration. L'idée est de décomposer $\mathbb{S}^3 \setminus V(K)$ en $n+2$ ouverts bien choisis. Considérons d'abord l'ouvert $A = \{z > 2\varepsilon\} \setminus V(K)$. Sous chaque croisement $i \in \{1, \dots, n\}$, on construit un parallélépipède plein B_i auquel on retire $V(K)$, et on y adjoint un arc vers z_0. Quitte à amincir les B_i, on peut les supposer disjoints.



Enfin, on considère un ouvert C situé sous $A \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n$, auquel on ajoute un arc vers z_0, de sorte que :

$$A \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n \cup C = \mathbb{S}^3 \setminus V(K). \tag{1.10}$$

Le théorème de van Kampen appliqué au niveau de chaque croisement assure d'ores et déjà que :

$$\pi_1(A) = \langle x_1 \rangle \star \cdots \star \langle x_n \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

L'ouvert B_1 est simplement connexe, tandis que $A \cap B_1$ est un parallélépipède plein privé d'un arc tracé sur la face du haut, auquel on a ajouté un arc vers z_0. Par conséquent :

$$\pi_1(A \cap B_1) = \langle \gamma_1 \rangle. \tag{1.11}$$

On observe sur l'illustration précédente que l'image de γ_1 dans $\pi_1(A)$ est donnée par :

$$\gamma_1 = x_k x_1^{-1} x_k^{-1} x_2 \quad \text{ou} \quad \gamma_1 = x_k^{-1} x_1^{-1} x_k x_2$$

selon la forme du croisement, ce qui correspond à la relation r_1. Par conséquent, d'après (1.11) et à l'aide du théorème de van Kampen, on obtient :

$$\pi_1(A \cup B_1) = \pi_1(A) \underset{\langle \gamma_1 \rangle}{\star} \pi_1(B_1) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 \rangle$$

puis par récurrence, on en déduit :

$$\pi_1(A \cup B_1 \dots \cup B_n) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle.$$

L'ajout de C ne modifie pas ce groupe, car C et $C \cap (A \cup B_1 \dots \cup B_n)$ sont tous deux simplement connexes, et le résultat se déduit alors de (1.10). Montrons maintenant que l'on peut omettre l'une des relations r_i. Pour ce faire, définissons les ouverts de $\mathbb{S}^3$:

$$A' = A \cup \{\infty\} \quad \text{et} \quad C' = B_n \cup C \cup \{\infty\}$$

de sorte que, comme dans (1.10) :

$$A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1} \cup C' = \mathbb{S}^3 \setminus V(K).$$

Observons alors que $\pi_1(A) = \pi_1(A')$, et que l'ajout de $B_1, \dots, B_{n-1}$ donne les mêmes relations, c'est-à-dire :

$$\pi_1(A \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle.$$

Enfin, on dispose d'un homéomorphisme :

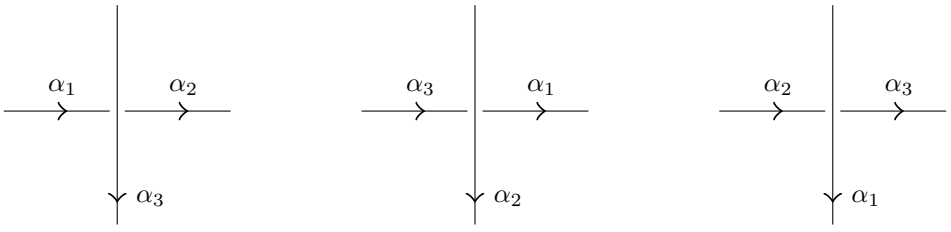
$$C' \cap (A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}) \cong \mathbb{S}^2 \setminus I.$$

pour un arc I tracé sur $\mathbb{S}^2$, et C' est simplement connexe. On conclut par le théorème de van Kampen. □

En particulier, puisque $\mathbb{S}^3 \setminus V(K)$ est toujours connexe par arcs, le théorème d'Hurewicz assure que[17] :

$$H_1(\mathbb{S}^3 \setminus V(K)) \cong \mathbb{Z}.$$

Calculons de nouveau le groupe $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{2,3})$, cette fois avec la méthode de Wirtinger. Le nœud de trèfle $K_{2,3}$ possède trois arcs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, et les trois lacets associés x_1, x_2, x_3 vérifient les relations ci-dessous.



$x_1 x_3 = x_3 x_2$ $\qquad$ $x_2 x_1 = x_3 x_2$ $\qquad$ $x_2 x_1 = x_1 x_3$

[17] Le groupe d'homologie $H_1(\mathbb{S}^3 \setminus V(K))$ est engendré par n'importe quel lacet simple entourant K. L'abélianisation du groupe fondamental correspond au retrait du point de base, il n'y a donc plus de blocage au niveau des croisements !

Par conséquent, d'après le théorème 1.9 et avec la rétraction (1.4) :

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{2,3}) \cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_2x_1 = x_3x_2,\ x_1x_3 = x_2x_1 = x_3x_2 \rangle$$

soit, en renommant les variables pour en faciliter la lecture :

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{2,3}) \cong \langle a, b, c \mid ba = cb,\ ac = ba = bc \rangle. \tag{1.12}$$

C'est une présentation différente de (1.8) avec $p = 2$ et $q = 3$:

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{2,3}) \cong \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle \tag{1.13}$$

et on peut obtenir (1.12) à partir de (1.13) avec les transformations $x = bab$ et $y = ab$. En effet, la relation $ba = ac$ donne $aba = bab$, puis :

$$x^2 = (bab)^2 = bab \cdot bab = aba \cdot bab = (ab)^3 = y^3$$

ce qui donne une inclusion, et l'autre se traite de manière analogue. Cependant, pour déterminer si deux présentations quelconques définissent le même groupe, il n'existe même pas d'algorithme général ! On ne peut qu'essayer de trouver les relations de l'une à partir de l'autre avec certaines combinaisons, et vice versa.

1.5 Nœuds bordants

Une question importante en théorie des nœuds est celle des surfaces : un nœud régulier est-il toujours le bord d'une surface dans $\mathbb{R}^3$? La réponse est oui : l'algorithme dit de Seifert permet de construire une telle surface.

Définition 1.14. *Une* surface de Seifert *est une surface compacte, connexe et orientable.*

Théorème 1.15. *Soit K un nœud régulier. Alors il existe une surface de Seifert S telle que $\partial S = K$.*

Démonstration. Détaillée dans [Rol76], pp. 118–120. □

Cependant, en dimension 4, les choses se simplifient considérablement, puisqu'un nœud peut toujours être dénoué dans $\mathbb{R}^4$, et borde donc un disque ![18] Formellement, on dispose d'un disque fermé $D \subseteq \mathbb{R}^2$ et d'un plongement topologique $\rho_K : D \to \mathbb{B}^4$ tel que $\rho_K(\partial D) = K$. Cela motive la définition suivante.

Définition 1.16. *Soit K un nœud régulier. Lorsqu'il existe un tel plongement ρ_K plat (resp. lisse), on dit que K est* topologiquement *(resp.* différentiablement*)* bordant.

Toute la question porte donc sur la régularité du plongement, et nous exploiterons pleinement la différence entre les caractères topologique et différentiable dans la construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique. L'excellente vidéo de Mickaël Launay sur le nœud de Conway (que vous pouvez visionner en cliquant ici) est très instructive à ce sujet.

[18] C'est un phénomène relativement général : lorsqu'on ajoute une dimension, on diminue les contraintes. Pensez à la situation suivante : vous vous déplacez sur un plan, et une droite coupe le plan en deux parties disjointes. En restant sur le plan, impossible de la traverser, mais avec une dimension supplémentaire, vous pouvez simplement passer par-dessus.

2 Recollements

Pour construire un $\mathbb{R}^4$ exotique, nous aurons besoin de recoller des espaces de différentes manières.

2.1 Sur la somme amalgamée

En topologie, la *somme amalgamée* consiste à recoller deux espaces topologiques disjoints en identifiant un sous-espace de l'un avec son image dans l'autre par une application continue.[19]

Définition 2.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques, Z un sous-espace topologique de Y, et $f : Z \to X$ une application continue. La* somme amalgamée *de X et Y le long de f est définie par :*

$$X \underset{f}{\sqcup} Y = (X \sqcup Y) / \mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par l'identification de $y \in Y$ avec $f(y) \in X$.

Les injections $X \hookrightarrow X \sqcup Y$ et $Y \hookrightarrow X \sqcup Y$ donnent deux applications « canoniques» :

$$j_1 : X \to X \underset{f}{\sqcup} Y \quad \text{et} \quad j_2 : Y \to X \underset{f}{\sqcup} Y.$$

Celles-ci définissent la topologie de la somme amalgamée. Ainsi, une application $\varphi : X \sqcup_f Y \to T$ est continue si, et seulement si, les applications $\varphi \circ j_1 : X \to T$ et $\varphi \circ j_2 : Y \to T$ le sont. Enfin, lorsque f est l'inclusion d'une partie $Z \subseteq X$, on notera plutôt :

$$X \underset{Z}{\sqcup} Y = X \underset{f}{\sqcup} Y.$$

Proposition 2.2. *Notons $S = X \sqcup_f Y$ ainsi que $q : X \sqcup Y \to S$ l'application quotient. Alors :*

(i) *la restriction q_1 de q à X est un plongement, et $q(X)$ est un fermé de S ;*

(ii) *la restriction q_2 de q à $Y \setminus Z$ est un plongement, et $q(Y \setminus Z)$ est un ouvert de S.*

Démonstration. La continuité de q_1 et de q_2 est obtenue par restriction. De plus, pour toute partie $A \subseteq X$:

$$q^{-1}(q(A)) = A \sqcup f^{-1}(A). \tag{2.3}$$

et pour toute partie $B \subseteq Y \setminus Z$:

$$q^{-1}(q(B)) = B. \tag{2.4}$$

En prenant $A = \{x\}$ pour $x \in X$, on obtient l'injectivité de q_1. De même, en prenant $B = \{y\}$ pour $y \in Y \setminus Z$, on obtient l'injectivité de q_2. Enfin, q_1 est fermée d'après (2.3) et par continuité de f, et q_2 est clairement ouverte d'après (2.4). Chacune est donc un homéomorphisme sur son image. □

Proposition 2.5. *Si X et Y sont connexes et $Z \neq \varnothing$, alors $S = X \sqcup_f Y$ est connexe.*

Démonstration. Si $g : S \to \{0, 1\}$ est une application continue, alors les applications :

$$g \circ j_1 : X \to \{0, 1\} \quad \text{et} \quad g \circ j_2 : Y \to \{0, 1\}$$

sont continues. Comme X et Y sont connexes, elles sont donc constantes, disons $g \circ j_1 = x$ et $g \circ j_2 = y$ pour $x, y \in \{0, 1\}$. Enfin, $Z \neq \varnothing$ donc on peut considérer $z \in Z$, de sorte que :

$$x = (g \circ j_1)(z) = (g \circ j_2)(z) = y.$$

Ainsi, g est constante sur les images de X et Y dans S. Elle est donc constante sur S par construction. □

[19] L'espace topologique obtenu peut être peu commode. Par exemple, la *droite à deux origines* $\mathbb{R} \sqcup_{\mathbb{R}^\times} \mathbb{R}$ n'est même pas séparée.

Proposition 2.6. *Si X, Y, Z sont compacts, alors $S = X \sqcup_f Y$ est compact.*

Démonstration. Il suffit de montrer que q est fermée et à fibres compactes, puisqu'elle est continue, surjective et que $X \sqcup Y$ est compact puisque X et Y le sont. Il suffit donc de montrer que pour tous $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ fermés, $q^{-1}(q(A))$ et $q^{-1}(q(B))$ sont des fermés. Le premier point est clair en vertu de (2.3). Pour le second, remarquons que (2.4) se généralise, pour une partie $B \subseteq Y$:

$$q^{-1}(q(B)) = f(B \cap Z) \sqcup (f^{-1}(f(B \cap Z)) \cup B). \tag{2.7}$$

Comme B est fermé et Z est compact, $B \cap Z$ est compact donc $f(B \cap Z)$ l'est aussi par continuité de f. C'est en particulier un fermé, donc $f^{-1}(f(B \cap Z))$ l'est aussi. En résumé, $q^{-1}(q(B))$ est bien fermé d'après (2.7). Enfin, q est à fibres compactes puisque f l'est, Y est séparé et Z est compact. □

2.2 Recollement de variétés

Nous allons voir que la somme amalgamée de deux variétés à bord reste une variété lorsque l'application de recollement est un homéomorphisme (ou un difféomorphisme dans le cas lisse) entre les bords.

Proposition 2.8. *Soient M et N deux variétés topologiques à bord de dimension n. Supposons qu'il existe un homéomorphisme $h : \partial N \to \partial M$. Alors $S = M \sqcup_h N$ est une variété topologique sans bord de dimension n.*

Démonstration. Par construction de S, ses ouverts sont les parties $U \subseteq S$ telles que $q^{-1}(U) = U_1 \sqcup U_2$, où U_1 est un ouvert de M et U_2 est un ouvert de N. Comme M et N admettent des bases dénombrables d'ouverts, c'est également le cas de $M \sqcup N$ donc de S. Le caractère séparé de S s'obtient par une démonstration identique à celle de la proposition 2.6, il reste donc à traiter la question des cartes. Notons tout d'abord :

$$B = q(\partial M \sqcup \partial N).$$

D'après la proposition 2.2, q induit un homéomorphisme :

$$\operatorname{Int} M \sqcup \operatorname{Int} N \to S \setminus B.$$

Par conséquent, il suffit de montrer que tout point de B admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Considérons $b \in B$, et notons $q^{-1}(b) = \{x, y\}$ où $y \in \partial N$ et $x = h(y) \in \partial M$. Considérons deux cartes locales (U, φ) sur M et (V, ψ) sur N associées respectivement à x et y. Quitte à restreindre les ouverts U et V, on peut supposer :

$$h(V \cap \partial N) = U \cap \partial M.$$

Puisque M et N ont un bord, on peut décomposer φ et ψ en $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$ et $\psi = (\psi_0, \psi_1)$, où les applications :

$$\varphi_0 : U \to \mathbb{R}^{n-1} \quad ; \quad \varphi_1 : U \to [0, \infty) \quad ; \quad \psi_0 : V \to \mathbb{R}^{n-1} \quad ; \quad \psi_1 : V \to [0, \infty)$$

sont continues, et vérifient $\varphi_1(x) = \psi_1(y) = 0$. Définissons maintenant[20] :

$$\beta = \varphi_0 \circ h \circ (\varphi_1)^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$$

et $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par la formule :

$$\gamma(x_1, \ldots, x_n) = (\beta(x_1, \ldots, x_{n-1}), -x_n)$$

de sorte que, pour tout $y \in V \cap \partial N$:

$$(B \circ \psi)(y) = ((\beta \circ \psi_0)(y), -\psi_1(y)) = ((\beta \circ \psi_0)(y), 0).$$

[20] Le renversement de la dernière coordonnée est en pratique utilisé pour obtenir une orientation cohérente sur la variété à l'arrivée. Nous nous affranchirons de telles considérations dans cet exposé.

Il reste à voir que l'application continue $\Phi : U \sqcup V \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\Phi(y) = \begin{cases} \varphi(y) & \text{si } y \in U \\ (\gamma \circ \psi)(y) & \text{si } y \in V \end{cases}$$

passe au quotient, car par définition de β et γ, pour tout $x \in V \cap \partial N$:

$$\Phi(h(x)) = \varphi(h(x)) \quad \text{et} \quad \Phi(x) = (\gamma \circ \psi)(x) = \varphi(h(x)).$$

On vérifie enfin que l'application induite est une bijection, dont la réciproque est donnée par :

$$\Phi^{-1}(y) = \begin{cases} (q \circ \varphi^{-1})(y) & \text{si } y_n \geq 0 \\ (q \circ \psi^{-1} \circ \gamma)(y) & \text{si } y_n < 0 \end{cases}$$

et c'est donc bien un homéomorphisme $q(U \sqcup V) \to \mathbb{R}^n$. □

Le cas des variétés différentielles est plus technique, mais nous sera fort utile dans la construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique. Nous introduisons d'abord un théorème très important pour la proposition qui va suivre, appelé en anglais *collar neighbourhood theorem*.

Théorème 2.9. *Soit M une variété différentielle à bord. Alors ∂M possède un voisinage tubulaire lisse dans M, c'est-à-dire un plongement lisse :*

$$\varphi : \partial M \times [0, 1) \to M$$

tel que $\varphi(x, 0) = x$ pour tout $x \in \partial M$.

Démonstration. Détaillée dans [Lee12] (théorème 9.25). □

Définition 2.10. *Soit M une variété différentielle de dimension n. Un* domaine régulier *de M est une sous-variété différentielle à bord de dimension n de M.*

Proposition 2.11. *Soient M et N deux variétés différentielles à bord de dimension n. Supposons qu'il existe un difféomorphisme $h : \partial N \to \partial M$. Alors $S = M \sqcup_h N$ admet une structure différentielle rendant M et N chacune difféomorphe à un domaine régulier de S.*

Démonstration. Nous avons vu dans la proposition 2.8 que S est une variété topologique de dimension n, il nous reste donc à y définir un atlas lisse. Le théorème 2.9 assure l'existence de plongements lisses :

$$\alpha : \partial M \times [0, 1) \to M \quad \text{et} \quad \beta : N \times [0, 1) \to N$$

d'images respectives V et W. Définissons maintenant l'application $\Phi : V \sqcup W \to \partial M \times (-1, 1)$ par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} (v, t) & \text{si } x = \alpha(v, t) \in V, \\ (h(w), -t) & \text{si } x = \beta(w, t) \in W. \end{cases}$$

Elle est clairement constante le long de h, donc elle passe au quotient en une injection :

$$\Phi : q(V \sqcup W) \to \partial M \times (-1, 1)$$

qui s'avère être un homéomorphisme. Elle est en effet fermée, et surjective car pour $(x, t) \in \partial M \times (-1, 1)$:

$$(x, t) = \begin{cases} (\Phi \circ \alpha)(x, t) & \text{si } t \geq 0 \\ (\Phi \circ \beta)(h^{-1}(x), -t) & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Cela fait en particulier de $q(V \sqcup W)$ une variété topologique de dimension n. Nous définissons à présent un atlas sur S comme suit. Si (U, φ) est une carte locale définie sur $\operatorname{Int} M$ ou $\operatorname{Int} N$, on lui associe :

$$\varphi \circ {q^{-1}}_{|q(U)} : q(U) \to \mathbb{R}^n$$

tandis que si (V, ψ) est définie sur $\partial M \times (-1, 1)$, on lui associe :

$$\psi \circ \Phi_{|\Phi^{-1}(V)} : \Phi^{-1}(V) \to \mathbb{H}^n.$$

On vérifie que ces cartes forment un atlas lisse sur S, et lui confèrent donc une structure différentielle. Enfin, la restriction $q_{|M}$ est continue, fermée et injective, c'est donc un plongement propre. C'est même un plongement lisse, dont l'image est un domaine régulier dans S. Les mêmes considérations s'appliquent à N. □

Corollaire 2.12. *Soient M et N deux variétés différentielles à bord de dimension n, ainsi que des parties non vides $A \subseteq \partial M$ et $B \subseteq \partial N$ qui sont des réunions des composantes des bords. Supposons qu'il existe un difféomorphisme $h : B \to A$. Alors $S = M \sqcup_h N$ admet une structure différentielle rendant M et N chacune difféomorphe à un domaine régulier de S.*

Démonstration. La preuve de la proposition 2.11 s'adapte en effectuant les restrictions appropriées. □

2.3 Recollement de sphères

Nous aurons besoin dans notre construction de recoller des variétés homéomorphes ou difféomorphes à des sphères. En dimension 2, on peut déjà se représenter le résultat :

$$\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{B}^2 \underset{\mathbb{S}^1}{\sqcup} \mathbb{B}^2.$$

Chaque disque $\mathbb{B}^2$ correspond à un hémisphère de $\mathbb{S}^2$. Ils sont alors recollés sur l'équateur, le cercle $\mathbb{S}^1$.

Proposition 2.13. *Pour tout entier $n \geq 1$, on dispose d'un homéomorphisme :*

$$\mathbb{S}^n \cong \mathbb{B}^n \underset{\mathbb{S}^{n-1}}{\sqcup} \mathbb{B}^n.$$

Démonstration. Notons $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées. Remarquons que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, s'équivalent :

- $\|x\| = 1$,
- $p(x) \in \mathbb{B}^n$ et $x_{n+1}^2 = 1 - \|p(x)\|^2$.

Par conséquent, p induit des homéomorphismes :

$$\alpha : \mathbb{S}^n \cap \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{B}^n \quad ; \quad \beta : \mathbb{S}^n \cap -\mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{B}^n \quad ; \quad \gamma : (\mathbb{S}^n \cap \mathbb{H}^{n+1}) \cap (\mathbb{S}^n \cap -\mathbb{H}^{n+1}) \to \mathbb{S}^{n-1}.$$

Les applications α^{-1} et β^{-1} coïncident sur $\mathbb{S}^{n-1}$ et passent donc au quotient en une application continue :

$$\mathbb{B}^n \underset{\mathbb{S}^{n-1}}{\sqcup} \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^n$$

qui est un homéomorphisme en tant que bijection continue entre compacts (cf. proposition 2.6). □

2.4 Attachement d'anses

Le dernier mode de recollement que nous utiliserons est l'attachement d'*anses*. Encore une fois, cette notion correspond bien à notre intuition, comme le montre l'illustration suivante.

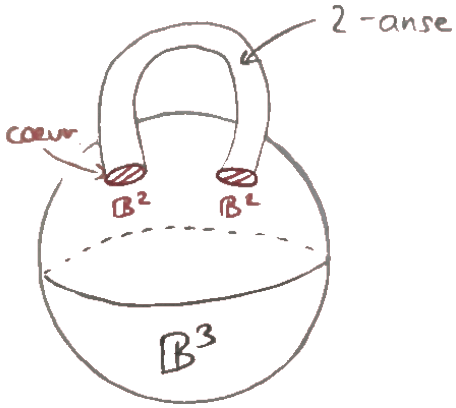


FIGURE 8 – Attachement d'une 2-anse à la boule $\mathbb{B}^3$.

Cependant, les anses que nous étudierons seront plongées dans $\mathbb{R}^4$, espace moins propice à l'intuition.

Définition 2.14. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. L'espace topologique :*

$$h^n_k = \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$$

est appelé anse *de degré k ou k-*anse*. La boule $\mathbb{B}^k$ est appelée* cœur *de l'anse.*

Le bord d'une telle anse est :

$$\partial h^n_k = (\partial \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}) \cup (\mathbb{B}^k \times \partial \mathbb{B}^{n-k}) = (\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k}) \cup (\mathbb{B}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}). \tag{2.15}$$

Considérons maintenant une variété à bord M de dimension $n \geq 1$, ainsi que $k \in \{1, \dots, n\}$. On suppose qu'il existe un plongement, topologique ou lisse :

$$\varphi : \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-k} \to \partial M. \tag{2.16}$$

L'*attachement* (dit *lisse* lorsque φ est lisse) d'une k-anse à M correspond aux transformations :

$$M \to M \cup (\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}) \quad \text{et} \quad \partial M \to (\partial M \setminus \varphi(\mathbb{S}^{k-1} \cup \mathbb{B}^{n-k})) \cup (\mathbb{B}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1})$$

ce qui correspond, en accord avec (2.15), à la somme amalgamée[21] :

$$M + h^n_k \overset{\text{def}}{=} M \underset{\varphi}{\sqcup} (\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}).$$

[21] Cela dépend *a priori* de l'application φ choisie. Par exemple, il est possible de faire « tourner » une anse plus d'une fois le long d'un nœud (en anglais, c'est la notion de *framing*). Nous irons ici au plus simple et éviterons ces considérations (le corps à anses que nous associerons à un nœud dans la section 3.1 sera construit avec un *framing* nul).

En tant que somme amalgamée le long d'un homéomorphisme (resp. difféomorphisme), l'attachement d'une anse préserve la structure de la variété topologique (resp. différentielle) d'origine.[22]

Proposition 2.17. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, n\}$, M une variété topologique de dimension n à laquelle on attache une k-anse. Alors $M + h_k^n$ est une variété topologique de dimension n.*

Démonstration. L'idée est exactement la même que dans la proposition 2.8, la difficulté principale provenant de la définition des cartes sur l'espace topologique résultant. □

Proposition 2.18. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, n\}$, M une variété topologique de dimension n à laquelle on attache une k-anse de manière lisse. Alors $M + h_k^n$ admet une structure différentielle compatible avec celles de M et h_k^n.*

Démonstration. Même chose, cette fois avec le corollaire 2.12. □

[22] On sent bien qu'il est toujours possible « d'arrondir » la partie de l'anse qui ferait obstruction au caractère lisse.

3 Construction d'un $\mathbf{R}^4$ exotique

Nous pouvons désormais entamer la construction à l'aide de toutes les notions vues précédemment. Donnons d'abord quelques définitions sur les structures exotiques.

Définition 3.1. *On dit qu'une variété différentielle $\mathcal{R}$ est un* $\mathbb{R}^4$ exotique *lorsque $\mathcal{R}$ est homéomorphe mais non difféomorphe à $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure standard.*

Nous allons construire un *grand* $\mathbb{R}^4$ exotique, c'est-à-dire contenant une partie déjà quelque peu étrange.

Définition 3.2. *Un $\mathbb{R}^4$ exotique $\mathcal{R}$ est dit* petit *lorsqu'il existe un plongement lisse $\rho : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^4$ faisant de $\rho(\mathcal{R})$ un ouvert de $\mathbb{R}^4$ pour la topologie standard. Dans le cas contraire, $\mathcal{R}$ est dit* grand.

En particulier, si $\mathcal{R}$ contient une variété différentielle compacte ne pouvant pas être plongée de manière lisse dans $\mathbb{R}^4$, alors $\mathcal{R}$ est grand. Pour obtenir un tel espace, nous allons construire un espace topologique appelé *corps à anses* à partir d'un nœud non différentiablement bordant.

3.1 Corps à anses d'un nœud

Considérons un nœud régulier K. Nous allons construire une variété différentielle appelée *corps à anses* en attachant une 2-anse à $\mathbb{B}^4$ le long de $V(K)$ comme suit. La boule $\mathbb{B}^4$ est une variété différentielle, dont le bord est la sphère $\mathbb{S}^3$. De plus, on dispose d'un homéomorphisme $V(K) \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$, ce qui correspond exactement au complémentaire d'un tore plein ouvert $T \subseteq \mathbb{S}^3$. Ainsi, comme dans (2.16), on dispose d'un plongement :

$$\varphi : V(K) \to \mathbb{S}^3 \setminus T \subseteq \mathbb{S}^3$$

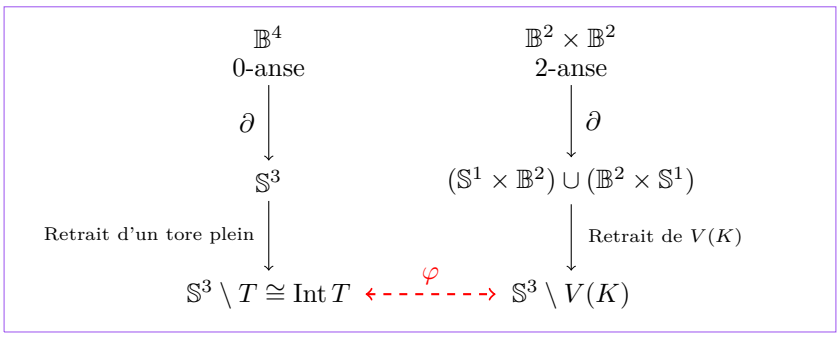
que l'on peut supposer lisse puisque K est régulier.[23] Considérons maintenant une 2-anse $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2$. En vertu de l'égalité (2.15), son bord est la réunion de deux tores pleins[24] :

$$\partial(\mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2) = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2) \cup (\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1) \cong V(K) \cup (\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1)$$

et les bords des variétés $\mathbb{S}^3 \setminus T$ et $V(K)$, recollées le long de φ en accord avec la construction de la section 2.4, sont tous deux homéomorphes au tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Le *corps à anses* associé à K est alors défini par :

$$\boxed{X_K = \mathbb{B}^4 \underset{\varphi}{\sqcup} (V(K) \cup (\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1)).}$$

Il s'agit d'une variété différentielle en vertu de la proposition 2.18, qui plus est compacte. Sa construction que nous venons de détailler formellement est résumée par le schéma suivant.



Corps à anses X_K associé au nœud K

[23] On peut toujours « arrondir » K aux endroits qui ne seraient pas lisses puisqu'il admet un voisinage tubulaire.
[24] On retrouve au passage la décomposition de $\mathbb{S}^3$ en deux tores pleins, puisque $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2$ est homéomorphe à $\mathbb{B}^4$.

Il peut être intéressant d'analyser le bord de X_K. Tout d'abord, les propositions 0.20 et 2.5 assurent que ∂X_K est connexe par arcs. Prenons l'exemple le plus simple : pour le nœud trivial K_0, le bord de X_{K_0} est constitué de deux tores pleins recollés sur leurs bords via l'application identité. Par conséquent :

$$\partial X_{K_0} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1.$$

Son groupe fondamental est donc relativement simple :

$$\pi_1(\partial X_{K_0}) \cong \mathbb{Z}.$$

Dans le cas général, on obtient une variété plus complexe, dont le groupe fondamental est plus fourni.[25]

3.2 Régularité du corps à anses

Proposition 3.3. *Soit K un nœud. Alors son corps à anses X_K se plonge de manière topologique plate dans $\mathbb{R}^4$ si, et seulement si, K est topologiquement bordant.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un plongement topologique plat $\rho : X_K \to \mathbb{R}^4$. Puisque $\mathbb{S}^4 \cong \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$, on peut supposer que ρ est à valeurs dans $\mathbb{S}^4$. De plus, par compacité de X_K et continuité de ρ, on en déduit que $\rho(X_K)$ est compact. Il existe donc une boule $B \subseteq \mathbb{R}^4$ telle que $X_K \subseteq B$.[26] D'après la proposition 2.13 :

$$\mathbb{S}^4 \cong \mathbb{B}^4 \underset{\mathbb{S}^3}{\sqcup} \mathbb{B}^4$$

donc (cf. section 2.1 pour les notations) on peut supposer que $B \subseteq j_1(\mathbb{B}^4)$. La 0-anse $\mathbb{B}^4$ de X_K est plongée de manière plate par ρ dans $j_2(\mathbb{B}^4)$. De plus, la proposition 2.13 fournit en particulier un homéomorphisme :

$$\mathbb{S}^4 \setminus \operatorname{Int} \rho(\mathbb{B}^4) \to \mathbb{B}^4 \tag{3.4}$$

puisque ρ est un homéomorphisme sur son image. Par construction de X_K, le nœud K est plongé de manière topologique plate dans :

$$\partial(\mathbb{S}^4 \setminus \operatorname{Int} \rho(\mathbb{B}^4)) \cong \mathbb{S}^3$$

et le cœur de la 2-anse de X_K est plongé de manière topologique plate dans $\mathbb{S}^4 \setminus \operatorname{Int} \rho(\mathbb{B}^4)$. Son bord est K, donc ce dernier est topologiquement bordant.

Réciproquement, s'il existe un plongement plat $\varphi : D \to \mathbb{B}^4$ tel que $\varphi(\partial D) = K$, alors on peut l'étendre en un plongement $\psi : D \times \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^4$. En vertu de (3.4), on peut recoller une deuxième boule $\mathbb{B}^4$ au complémentaire de l'image de ψ au niveau des bords. Nous avons alors :

- une 2-anse $\psi(D \times \mathbb{B}^2) \cong D \times \mathbb{B}^2 \cong \mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2$;
- une 0-anse $\mathbb{B}^4$;

recollées le long de $V(K)$, elles forment donc le corps à anses X_K. Le plongement ψ envoie X_K dans $\mathbb{S}^4$ de manière plate, et quitte à réduire le voisinage tubulaire ayant permis l'extension de φ en ψ, on peut supposer :

$$\mathbb{S}^4 \setminus \psi(X_K) \neq \varnothing$$

de sorte que le retrait d'un point à l'arrivée donne un plongement lisse $X_K \to \mathbb{R}^4$. □

Proposition 3.5. *Soit K un nœud. Alors son corps à anses X_K se plonge de manière lisse dans $\mathbb{R}^4$ si, et seulement si, K est différentiablement bordant.*

Démonstration. La preuve de la proposition 3.3 s'adapte en faisant deux modifications. Le voisinage tubulaire du disque D est obtenu par le théorème 4.2 dans [Kos13] plutôt que par le caractère plat du plongement, et l'homéomorphisme de la proposition 2.13 peut être transformé en un difféomorphisme $\mathbb{S}^4 \setminus \operatorname{Int} \rho(\mathbb{B}^4) \to \mathbb{B}^4$. □

[25] En fait, le bord ∂X_K est souvent une variété dite *hyperbolique*, avec un groupe fondamental très conséquent.

[26] Rappelons que la topologie considérée sur $\mathbb{R}^4$ ici est bien la topologie standard ! C'est la structure différentielle qui diffère.

3.3 Fin de la construction

Il ne nous reste plus qu'à recoller (sans mauvais jeu de mots) tous les résultats obtenus jusqu'à présent !

Théorème 3.6. *Il existe un grand $\mathbb{R}^4$ exotique.*

Démonstration. Considérons un nœud K topologiquement bordant mais non différentiablement bordant, par exemple le nœud de Conway évoqué dans l'introduction. D'après la proposition 3.3, il existe un plongement topologique $\rho : X_K \to \mathbb{R}^4$. Nous allons construire un grand $\mathbb{R}^4$ exotique en recollant $\rho(X_K)$ avec :

$$Y_K = \mathbb{R}^4 \setminus \operatorname{Int} \rho(X_K).$$

On vérifie sans peine que Y_K est une sous-variété topologique de dimension 4 de $\mathbb{R}^4$. D'après la proposition 0.13, $\rho(X_K)$ est une sous-variété différentielle de dimension 4 de $\mathbb{R}^4$, qui plus est compacte puisque X_K l'est et que ρ est continue. Par conséquent, la variété Y_K n'est pas compacte. En vue d'appliquer le théorème 0.8, montrons qu'elle est connexe par arcs. Considérons $x, y \in Y_K$ ainsi que le chemin :

$$\gamma(t) = (1-t)x + ty.$$

Si γ reste à valeurs dans Y_K, alors x et y sont bien reliés dans Y_K. Sinon, l'idée est de passer par $\partial\rho(X_K)$ pour relier x et y. Notons alors :

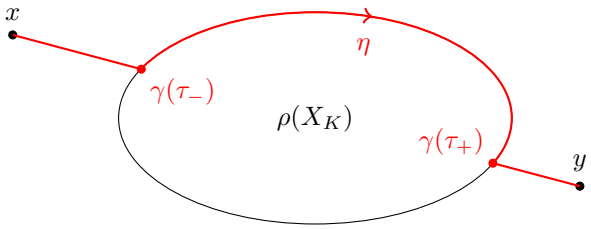
$$\tau_- = \inf\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in \partial\rho(X_K)\} \quad \text{et} \quad \tau_+ = \sup\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in \partial\rho(X_K)\}.$$

Remarquons d'abord que $\tau_-, \tau_+ \in (0,1)$ puisque $x, y \notin \rho(X_K)$. De plus, par continuité de γ :

$$\gamma(\tau_-) \in \partial\rho(X_K) \quad \text{et} \quad \gamma(\tau_+) \in \partial\rho(X_K).$$

Puisque ∂X_K est connexe par arcs, il existe un chemin δ reliant $\gamma(\tau_-)$ à $\gamma(\tau_+)$ dans $\partial\rho(X_K)$. Les points x et y sont alors reliés par le chemin :

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma(t\tau_-) & \text{si } 0 \le t \le \tau_-, \\ \delta((1-t)\tau_- + t\tau_+) & \text{si } \tau_- \le t \le \tau_+, \\ \gamma(t\tau_+ \,/\, (1-\tau_+)) & \text{si } \tau_+ \le t \le 1. \end{cases}$$



Le théorème 0.8 s'applique et donne alors l'existence d'une structure différentielle sur Y_K. De plus, d'après la proposition 0.5, le plongement ρ transporte la structure différentielle de X_K sur $\rho(X_K)$. Nous avons donc à ce stade deux variétés différentielles de dimension 4, chacune avec une structure abstraite, avec le même bord :

$$\partial\rho(X_K) = \partial Y_K$$

et par la proposition 0.16, on dispose donc d'un homéomorphisme $\partial X_K \to \partial Y_K$. Or, ces deux variétés sont de dimension 3, donc elles sont difféomorphes par le théorème 0.9 ! Plus précisément, il existe un difféomorphisme $\varphi : \partial\rho(X_K) \to \partial X_K$ isotope à la restriction de ρ à $\partial\rho(X_K)$. En vertu de la proposition 2.11, l'espace :

$$\boxed{\mathcal{R} = X_K \underset{\varphi}{\sqcup} Y_K}$$

est une variété différentielle de dimension 4, qui plus est homéomorphe à $\mathbb{R}^4$ par construction. Mais s'il existait un difféomorphisme $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^4$, alors la restriction de f à X_K serait un plongement lisse $X_K \to \mathbb{R}^4$, ce qui ferait de K un nœud différentiablement bordant et contredirait notre hypothèse. Par conséquent, $\mathcal{R}$ est un $\mathbb{R}^4$ exotique, et même grand car la variété compacte $X_K \subseteq \mathcal{R}$ n'est pas plongeable de manière lisse dans $\mathbb{R}^4$. □

Bibliographie

[Atl] Knot Atlas, « K11n34 », sur `https://katlas.org/wiki/K11n34`.

[Dav] K. Davis, « Slice knots and exotic $\mathbb{R}^4$ », sur `https://mathoverflow.net/a/57926`.

[FQ89] M. Freedman, F. Quinn, *Topology of 4-Manifolds*, 1989.

[HM74] M. W. Hirsch, B. Mazur, *Smoothings of Piecewise Linear Manifolds*, 1974.

[KM63] M. A. Kervaire, J. Milnor, « Groups of homotopy spheres: I », *Ann. of Math.*, vol. 77, no. 3, 1963, pp. 504–537.

[Kos13] A. A. Kosinski, *Differential Manifolds*, 2013.

[Lee11] J. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2011.

[Lee12] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2012.

[Lin14] L. Linov, « An Introduction to Knot Theory and the Knot Group », 2014.

[Mil56] J. Milnor, « On manifolds homeomorphic to the 7-sphere », *Ann. of Math.*, vol. 64, no. 2, 1956, pp. 399–405.

[Moi52] E. E. Moise, « Affine structures in 3-manifolds. The triangulation theorem and Hauptvermutung », *Ann. of Math.*, vol. 56, 1952, pp. 96–114.

[Pic20] L. Piccirillo, « The Conway knot is not slice », *Ann. of Math.*, vol. 191, no. 2, 2020, pp. 581–591.

[Rad25] T. Radó, « Über den Begriff der Riemannschen Fläche », *Acta Scientarum Mathematicarum Universitatis Szegediensis*, 1925.

[Ric] M. Richling, « Torus Knots », sur `https://www.mitchr.me/SS/torusKnots`.

[Rol76] D. Rolfsen, *Knots and Links*, 1976.

[Sta62] J. R. Stallings, « The piecewise-linear structure of Euclidean space », *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 58, 1962, pp. 481–488.

[Tau87] C. H. Taubes, « Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds », *Journal of Differential Geometry*, vol. 25, no. 3, 1987, pp. 363–430.

[Wik] Wikipedia, « Wild knot », sur `https://en.wikipedia.org/wiki/Wild_knot`.

[WX17] G. Wang, Z. Xu, « The triviality of the 61-stem in the stable homotopy groups of spheres », *Ann. of Math.*, vol. 186, no. 2, 2017, pp. 501–580.