Henri Drouhin
Giovanni Lebaron

ens rennes | Université de Rennes

235 | Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

I. Notions d'uniformité

On fixe deux espaces vectoriels normés E et F de dimension finie, une partie non vide $X \subset E$, et une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $f_n : X \to F$.

1. Suites de fonctions

Définition 1 : on dit que (f_n) converge simplement sur X vers $f : X \to F$ lorsque $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ pour tout $x \in X$, i.e.
$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$
la fonction f est appelée limite simple de (f_n) sur X.

Exemple 2 : la suite (f_n) définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Remarque 3 : f n'est pas continue alors que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$!

Définition 4 : on dit que (f_n) converge uniformément sur X vers $f : X \to F$ lorsque $\|f_n - f\|_{\infty,X} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, i.e.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall x \in X \ \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$

Proposition 5 : si (f_n) converge uniformément vers f sur X, alors elle converge simplement vers f sur X.

Remarque 6 : réciproque fausse (cf. exemple 2)

Proposition 7 (critère de Cauchy uniforme) : (f_n) converge uniformément sur X si
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall p, q \geq N \ \|f_p - f_q\|_{\infty,X} \leq \varepsilon$.

Proposition 8 : soit $a \in X$. Si (f_n) converge uniformément vers $f : X \to F$ sur X, et chaque f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Corollaire 9 : si (f_n) converge uniformément vers $f : X \to F$ sur X et chaque f_n est continue sur X, alors f est continue sur X.

Remarque 10 : cela permet de montrer qu'une convergence n'est pas uniforme, par exemple avec $f_n : x \mapsto e^{-nx}$ définie sur $[0,+\infty[$ (cf. exemple 2 aussi).

Théorème 11 (de la double limite) : soit $a \in \overline{X}$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur X vers $f : X \to F$ et que chaque f_n a une limite $l_n \in E$ en a. Alors la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite $l \in E$, et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$, i.e.
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

2. Dérivation et intégration

On suppose que $X = I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle*.

Remarque 12 : si chaque f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I, la convergence uniforme de (f_n) sur I ne suffit pas pour la dérivabilité de la limite, par exemple avec $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

Théorème 13 : on suppose que :
- chaque f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I,
- (f_n) converge simplement sur I,
- (f_n') converge uniformément sur tout compact de I vers $g : I \to F$.

Alors (f_n) converge uniformément sur tout compact de I vers $f : I \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $f' = g$.

*non vide

Remarque 14 : le théorème 13 s'étend au cas $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) par récurrence, sous l'hypothèse f_n de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout n, avec convergence uniforme de $(f_n^{(l)})$ pour tout $l \in \{0, \dots, k\}$.

Théorème 15 : si (f_n) converge uniformément vers $f : I \to F$ sur I, si chaque f_n est intégrable et si I est compact, alors f est intégrable et $\int_I f = \lim_{n \to \infty} \int_I f_n$.

On revient au cas où $X \subseteq E$ est quelconque.

Théorème 16 : supposons que X soit un ouvert convexe de E, et que
- (f_n) converge simplement sur X,
- chaque f_n est différentiable sur X,
- (df_n) converge uniformément sur tout compact de X vers $g : X \to \mathcal{L}(E, F)$.

Alors il existe $f : X \to F$ différentiable telle que $df = g$, (f_n) converge simplement vers f sur X, et uniformément sur tout compact de X.

Théorème 17 (Weierstraß) : soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact de U vers $f : U \to \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout compact de U vers $f^{(k)}$. DEV 1

Théorème 18 : la fonction Gamma d'Euler, définie pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$, par $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}) \quad \Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

3. Séries de fonctions

Remarque 19 : les définitions et résultats pour les suites de fonctions se transposent aux séries de fonctions, en remplaçant f_n par $\sum_{k=0}^{n} f_k$. On introduit un mode de convergence supplémentaire.

Définition 20 : on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur X lorsque chaque f_n est bornée sur X, et la série de nombres réels $\sum \|f_n\|_\infty$ converge

Proposition 21 : la convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Application 22 : la fonction zêta de Riemann, définie pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$ par $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$, est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

4. Continuité uniforme

Théorème 23 (Heine) : si $f : E \to F$ est continue sur un compact $K \subseteq E$, alors f est uniformément continue sur K.

Application 24 (Sommes de Riemann) : si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors $\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\, dx$.

Exemple 25 : $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}$.

Théorème 26 (Dini) : supposons que $X = [a, b]$, que $F = \mathbb{R}$, et que chaque f_n soit continue sur $[a, b]$. Si (f_n) converge simplement vers $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, et si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :
- (f_n) est croissante (i.e. $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout n)
- chaque f_n est une fonction croissante sur $[a, b]$

alors la convergence de (f_n) vers f sur $[a, b]$ est uniforme.

Application 27 (Glivenko-Cantelli) : soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F, et F_n la fonction de répartition empirique de $(X_1, \dots, X_n)$: $F_n(x, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i(\omega) \leq x\}}$.
Alors $(F_n(\cdot, \omega))$ converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}$, P-p.s.

II. Intégration de Lebesgue

On fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et une suite (f_n) de fonctions mesurables $f_n : X \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Théorèmes fondamentaux

Théorème 28 (de convergence monotone) : si chaque f_n est positive et (f_n) est croissante alors $\lim_{n \to \infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X \lim_{n \to \infty} f_n\, d\mu$.

Théorème 29 (de convergence dominée) : supposons que :
- (f_n) converge simplement μ-p.p. sur X,
- $\exists g \in L^1(\mu)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \leq g$ μ-p.p.

Alors : $\exists f \in L^1(\mu)$ $f_n \to f$ μ-p.p., et $\int_X |f_n - f|\, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Application 30 : $\int_0^\infty \ln(x) e^{-x} dx = -\gamma$ (constante d'Euler).

Théorème 31 : Si la série $\sum \int_X |f_n| d\mu$ converge, alors les fonctions f_n, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ et la fonction définie p.p. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sont intégrables, et $\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$.

Application 32 : $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

On considère un autre espace mesuré $(Y, \mathcal{B}, \nu)$.

Théorème 33 (Fubini-Tonelli, admis) : On suppose que μ et ν sont σ-finies, et que $f : X \times Y \to [0,+\infty]$ est mesurable. Alors, dans $[0,+\infty]$: $\int_{X\times Y} f \, d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\nu(dy)\right)\mu(dx)$
$= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mu(dx)\right)\nu(dy)$.

Théorème 34 (Fubini-Lebesgue, admis) : même énoncé en supposant f intégrable, égalité alors mais dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Application 35 : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

2. Régularité des fonctions définies par une intégrale

On fixe un espace métrique E, $a \in E$ et une fonction $f : E \times X \to \mathbb{C}$.

Théorème 36 : Supposons que :
- pour tout $t \in E$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ soit mesurable,
- pour μ-presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ soit continue en a,
- $\exists g \in L^1(\mu)$ $\forall t \in E$ $|f(t,x)| \le |g(x)|$ μ-p.p. $x \in X$.

Alors $F : t \in E \mapsto \int_X f(t,x)\mu(dx)$ est bien définie et continue en a.

Application 37 : Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 38 : Supposons que $E = I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle non vide, et que :
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t,x) \in L^1(\mu)$,
- $\partial_t f(a,x)$ existe pour μ-presque tout x,
- $\exists g \in L^1(\mu)$ $\forall t \in I$ $|f(t,x) - f(a,x)| \le |t-a| g(x)$ μ-p.p. $x \in X$.

Alors F est bien définie et dérivable en a, avec :
$F'(a) = \int_X \partial_t f(a,x)\mu(dx)$.

Application 39 : pour $a \in]0,+\infty[$ et $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.

3. Un détour par les séries de Fourier

Théorème 40 (Banach-Steinhaus) : Soient E, F deux espaces de Banach et $(T_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $x \in E$, $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < \infty$. Alors $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{E\to F} < \infty$.

Application 41 : il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, 2π-périodique, telle que la série de Fourier de f en 0 diverge.

III. Applications en probabilités

1. Fonction caractéristique : premières propriétés

Définition 42 : la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est définie, pour $t \in \mathbb{R}^d$, par : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{it\cdot X}]$, où $t \cdot X = \sum_{i=1}^d t_i X_i$.

Exemple 43 : Si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, alors $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))$.

Proposition 44 : Si X et Y sont des vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et indépendants, alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Proposition 45 : Si X est une variable aléatoire telle qui admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\varphi_X \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et pour tout $l \in \{1,\dots,k\}$: $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi_X^{(l)}(t) = i^l \mathbb{E}[X^l e^{itX}]$.

2. Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$

DEV 2

Théorème 46 : Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note $(e_1,\dots,e_d)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. La marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$, définie par la suite $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, avec $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ i.i.d. $\sim \mathcal{U}(\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\})$, est récurrente si $d = 1$ ou $d = 2$.

3. Théorème central limite

Théorème 47 (Lévy) : Soient (X_n) une suite de variables aléatoires réelles (v.a.r.) et X une v.a.r. Alors (X_n) converge en loi vers X si (φ_{X_n}) converge simplement vers φ_X sur $\mathbb{R}$.

Théorème 48 (central limite) : Soit (X_n) une suite de v.a.r. i.i.d. L^2 centrées réduites. Alors $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

Application 49 (formule de Stirling) : $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$.