Références :

- Analyse de Fourier, El Amrani
- Cours d'analyse fonctionnelle, Li
- Théorie de l'intégration, Briane, Pagès

Développements :

1. Inégalité de Hardy
2. Échantillonnage de Shannon

1. Intégrabilité

1.1. Fonctions intégrables

- Déf. : on dit que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est **intégrable** lorsque $\int_\Omega |f| < \infty$
- Notation : $\mathscr{L}^1(\Omega) = \{\text{fonctions intégrables } \Omega \to \mathbb{R}\}$
- Prop. : inégalité triangulaire
- App. : bonne définition de $\hat{f}$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$
- Prop. : $\mathscr{L}^1(\Omega)$ est un espace vectoriel sur lequel $\|\cdot\|_1$ est une semi-norme et $\int$ est une forme linéaire positive
- Déf. : $\mathrm{L}^1(\Omega) = \mathscr{L}^1(\Omega)/=_{\mathrm{pp}}$
- Prop. : $\mathrm{L}^1(\Omega)$ est un espace vectoriel normé

1.2. Théorèmes de convergence

- Th. de Beppo Levi
- Lemme de Fatou + cas d'inégalité stricte
- Th. de convergence dominée
- App. : calcul de $\int_0^\infty \log(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$
- Th. de Fubini
- App. : calcul de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

1.3. Régularité de fonctions définies par une intégrale

- Th. : continuité sous $\int$
- App. : continuité de $\hat{f}$
- Th. : dérivabilité sous $\int$
- App. : régularité de la convolution $\mathscr{C}_c^k * \mathrm{L}^1$

2. Espaces L^p

2.1. Définitions et résultats principaux

- Déf. : $\mathrm{L}^p(\Omega)$ pour $p < \infty$, $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Cas particulier : $\ell^p(\mathbb{N})$ ou $\ell^p(\mathbb{Z})$.
- Prop. : inégalité de Hölder
- Prop. : inégalité de Minkowski
- Cor. : $\mathrm{L}^p(\Omega)$ est un espace vectoriel normé.
- Th. de Riesz-Fisher
- Cor. : $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
- **Dev. 1 : Inégalité de Hardy**

2.2. Théorèmes de densité

- Th. : $\mathscr{C}_0^0(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ si $p < \infty$
- Déf. : approximation de l'unité
- Ex. : si χ est une fonction positive, d'intégrale 1, à support dans $\mathbb{B}^d$, alors $\chi_n(x) = n^d \chi(nx)$ définit une approximation de l'unité
- Ex. : noyaux (Laplace, Gauss, etc.)
- Déf. : convolution $\mathrm{L}^p * \mathrm{L}^1$ si $p < \infty$
- Prop : régularité de $\mathscr{C}_c^k * \mathrm{L}^p$ si $p < \infty$
- Thm. : $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ si $p < \infty$.
- Cor. : si (χ_n) est une approximation de l'unité et $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p < \infty$, alors $\|f * \chi_n - f\|_p \to 0$.
- App. : $\|\tau_h f - f\|_p \to 0$ lorsque $h \to 0$, et $\|\tau_h f - f\|_p \to 2^{1/p}\|f\|_p$ lorsque $h \to \infty$, où $\tau_h f(x) = f(x-h)$ et $p < \infty$.
- Contre-ex. pour $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$
- App. : lemme de Riemann-Lebesgue

3. Analyse de Fourier

3.1. Préliminaires sur la transformée de Fourier

- Prop. : si $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\int f\hat{g} = \int \hat{f} g$.
- Prop. (formule de Plancherel-Parseval) : si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{d/2}\|f\|_2$.
- Thm. : si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, alors il existe une suite (f_n) de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, et dans ce cas $(\hat{f}_n)$ converge vers une fonction $\hat{f}$ indépendante de (f_n).
- Déf. : cette limite est appelée transformée de Fourier de f.
- Thm. (formule de dualité) : si $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f}g, f\hat{g} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$.

3.2. Échantillonnage de Shannon (Dev. 2)

- Déf. : $\mathrm{BL}^2(A) = \{f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f} = 0 \text{ p.p. en dehors de } [-A, A]\}$
- Prop. : $\mathrm{BL}^2(A)$ est un espace de Hilbert
- Prop. : si $f \in \mathrm{BL}^2(A)$, alors $f \in \mathscr{C}_0^0(\mathbb{R})$ et $\|f\|_\infty \leq \|f\|_2$.
- Prop. : $\left(\sqrt{\frac{A}{\pi}}\tau_{n\pi/A}(\mathrm{sinc})\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{BL}^2(A)$.
- Thm (échantillonnage de Shannon) : l'application $f \in \mathrm{BL}^2(A) \longmapsto \left(f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie. En particulier, si $f \in \mathrm{BL}^2(A)$, alors $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\frac{\sin(Ax - n\pi)}{Ax - n\pi}$ où la série converge dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, et uniformément sur $\mathbb{R}$.