Références :

- Analyse pour l'agrégation, Queffélec, Zuily
- Cours d'analyse fonctionnelle, Li
- Topologie, Queffélec

Développements :

- Inégalité de Hardy
- Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente

1. Généralités

- Normes, espaces vectoriels normés. Normes équivalentes. Équivalence des normes en dimension finie. Compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie. Théorème de Riesz.
- Applications linéaires continues. Norme subordonnée.
- Dual topologique. Dualité L^p / L^q.
- Inégalité de Hardy. Théorème de Hahn-Banach. Corollaire : il n'existe aucune isométrie $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})' \to \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

2. Espaces de Banach

- Propriétés élémentaires. Les espaces de dimension finie sont des Banach. Si F est un Banach, alors $\mathscr{L}_c(E,F)$ également. Espaces $\mathscr{C}^0(K,F)$ où K est un compact et F est un Banach. Espace $\mathscr{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Lien entre convergence absolue et convergence pour les séries à valeurs dans un Banach. Si $|||u||| < 1$, alors $(u-\mathrm{id})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$. Application : si E est un Banach, alors $\mathrm{GL}(E)$ est un ouvert de E.
- Espaces L^p. Inégalité de Hölder. Inégalité de Minkowski. Théorème de Riesz-Fisher.
- Théorème de Baire. Une base d'un espace de Banach est finie ou indénombrable. Théorème de Banach-Steinhaus. Application : il existe $f \in \mathscr{C}_{2\pi}^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ dont la série de Fourier diverge en 0. Théorème de l'application ouverte. Théorème d'isomorphisme de Banach. Application : non-surjectivité de $\mathcal{F} : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_0^0(\mathbb{R})$. Théorème du graphe fermé.