Développements :

- Loi d'inertie de Sylvester
- Loi de réciprocité quadratique

Références :

- Algèbre linéaire, Grifone
- Mathématiques pour l'agrégation, Rombaldi

On fixe un espace vectoriel de dimension finie E, sur un corps K de caractéristique $\neq 2$.

1. Résultats généraux

1.1. Formes bilinéaires [Grifone]

- Def : forme bilinéaire sur E
- Def : matrice d'une forme bilinéaire
- Ex : matrice de $b(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$
- Prop : $b(x,y) = x^T My$ où M est la matrice de b
- Def : rang $\mathrm{rg}(b)$, noyau $N(b)$, dégénérescence, via la dualité $E \to E^*$
- Ex : $b(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$ est de rang plein et non dégénérée
- Prop : si b est une forme bilinéaire, alors :
  - le noyau de b est le noyau de toute matrice représentant b
  - le rang de b est le rang de toute matrice représentant b
  - $\dim E = \mathrm{rg}(b) + \dim N(b)$

1.2. Formes quadratiques [Gourdon, Grifone]

- Def : forme quadratique
- Prop :
  - si s est une forme bilinéaire symétrique sur E, alors $q(x) = s(x,x)$ est une forme quadratique
  - si q est une forme quadratique sur E, alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique s sur E telle que $q(x) = s(x,x)$, donnée par $s(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ et appelée forme polaire de q
- Ex : $q(M) = \mathrm{tr}(M^2)$ a pour forme polaire $s(M,N) = \mathrm{tr}(MN)$
- Def : rang, noyau, non dégénérescence
- Def : forme quadratique positive, définie positive

- Ex : $q(x,y,z) = 4x^2 + 3y^2 + 5xy - 3xz + 8yz$ n'est pas dégénérée, mais non définie positive car $q(0,0,1) = 0$

1.3. Isotropie [Grifone]

- Def : vecteur isotrope, cône isotrope $I(q)$
- Ex : si $q(x,y) = x^2 - y^2$, alors $I(q) = \{x = y\} \cup \{x = -y\}$
- Prop : $I(q)$ est stable par multiplication externe
- Prop : $I(q) \subseteq N(q)$

2. Orthogonalité et réduction

On fixe une forme quadratique q sur E.

2.1. Orthogonal d'une partie [Rombaldi]

- Def : orthogonal d'une partie de E
- Prop : si $A \subseteq E$, alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
- Prop : $A \subseteq B \implies B^\perp \subseteq A^\perp$
- Ex : $I(q) = E^\perp$ (pas toujours nul !)
- Prop : si $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel, alors :
  - $\dim F + \dim F^\perp \geq \dim E$ avec égalité ssi q est non dégénérée
  - $E = F \oplus F^\perp$ ssi $q_{|F}$ est non dégénérée

2.2. Bases orthogonales, réduction de Gauss [Grifone, Rombaldi]

- Def : base q-orthogonale, base q-orthonormée
- Thm : existence d'une base q-orthogonale
- Thm (réduction de Gauss) : il existe $r \in \{0, \dots, n\}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \setminus \{0\}$ et $\ell_1, \dots, \ell_r \in E^*$ linéairement indépendantes, vérifiant $q(x) = \lambda_1 \ell_1(x)^2 + \dots + \lambda_r \ell_r(x)^2$
- Ex : réduction de $q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 8yz$
- Prop : avec les notations du théorème :
  - r est le rang de q
  - $N(q) = \{\ell_1(x) = \dots = \ell_r(x) = 0\}$

3. Classifications et applications

On fixe une forme quadratique q sur E.

3.1. Actions et invariants [Rombaldi]

- Prop : $P \cdot M = PMP^T$ définit une action $\mathrm{GL}_n(K) \curvearrowright \mathrm{S}_n(K)$
- Prop : si M et N sont congruentes, alors $\det M = \det N$ à un carré près
- Def : discriminant d'une forme quadratique
- Prop : rang et discriminant sont invariants par congruence

3.2. Sur les corps algébriquement clos [Grifone]

- Thm : si K est algébriquement clos, alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que, si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, alors $q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$
- Cor : si K est algébriquement clos, alors E admet une base q-orthonormée ssi q est non dégénérée (i.e. de rang plein)

3.3. Sur le corps des réels [Grifone, Rombaldi]

- Thm (Sylvester) : si $K = \mathbb{R}$, alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que, si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, alors $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$, où p est un entier qui ne dépend que de q
- Def : le couple $(p, r-p)$ est appelé signature de q
- Ex : signature de $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 15z^2 - 4xy + 6xz - 8yz$
- Thm :
  - p est la dimension maximale (éventuellement nulle) des sous-espaces vectoriels de E sur lesquels q est définie positive
  - $r - p$ est la dimension maximale (éventuellement nulle) des sous-espaces vectoriels de E sur lesquels q est définie négative
- App : classification des coniques
- App : lemme de Morse

3.4. Sur les corps finis [Grifone, Rombaldi]

- Thm : si K est fini et $\alpha \in \mathbb{K}^\times$ n'est pas un carré, alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que, si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, alors $q(x) = x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + \delta x_r^2$ avec $\delta \in \{1, \alpha\}$
- App : loi de réciprocité quadratique