Références :

- Algèbre, Gourdon
- Algèbre - Tome 2 - Groupes, Szpirglas
- Algèbre linéaire, Grifone
- Mathématiques pour l'agrégation, Rombaldi
- Oraux X-ENS Algèbre 3

Développements :

- Réduction des endomorphismes normaux
- Théorème de Courant-Fischer

On fixe un espace euclidien E.

1. Endomorphismes symétriques

1.1. Adjoint d'un endomorphisme [Gourdon, Grifone]

- Def : adjoint f^* de $f \in \mathscr{L}(E)$
- Ex : l'application $\varphi_A : \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_A(M) = A^T M A$ vérifie $(\varphi_A)^* = \varphi_{A^T}$
- Prop : $\mathrm{id}_E^* = \mathrm{id}_E$
- Prop : si $f, g \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
  - $(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$
  - $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- Prop : si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors :
  - $f^{**} = f$
  - $\ker(f^*) = (\mathrm{im}\, f)^\perp$
  - $\mathrm{im}\, f^* = (\ker f)^\perp$
  - $\det f^* = \det f$
  - $\mathrm{rg}\, f^* = \mathrm{rg}\, f$
- Prop : si B est une base orthonormée de E, alors $\mathrm{Mat}_B(f^*) = \mathrm{Mat}_B(f)^T$
- Prop : si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f^*

1.2. Endomorphismes auto-adjoints [Grifone]

- Def : endomorphisme auto-adjoint/symétrique
- Ex : φ_A définie plus haut est symétrique ssi A est symétrique

- Rmq : $f \in \mathscr{S}(E)$ ssi la matrice de f dans n'importe quelle base orthonormée de E est symétrique
- Thm : si $f \in \mathscr{S}(E)$, alors :
  - les valeurs propres de f sont toutes réelles
  - f est diagonalisable
  - les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux
    En particulier, E admet une base orthonormée constituée de vecteurs propres de f.
- Cor : si $M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in \mathrm{O}(n)$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale

1.3. Endomorphismes symétriques positifs [Rombaldi, X-ENS ALG3]

- Def : endomorphisme positif, défini positif
- Notation : $\mathscr{S}^+(E)$, $\mathscr{S}^{++}(E)$
- Def : matrice positive, matrice définie positive
- Notation : $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
- Thm : si $f \in \mathscr{S}(E)$, alors $f \in \mathscr{S}^+(E)$ (resp. $f \in \mathscr{S}^{++}(E)$) ssi les valeurs propres de f sont positives (resp. strictement positives)
- Cor : si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ ssi il existe $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T B$
- Thm : si $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :
  - $P^T M P = I_n$
  - $P^T N P$ soit diagonale
- App : extrema de quotients de formes quadratiques
- Thm : si $M \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe une unique matrice $R \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$
- Prop :
  - $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé convexe de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$
  - $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$
- Thm : Courant-Fischer
- Cor : inégalité de perturbation de Weyl

2. Endomorphismes normaux [Gourdon, Rombaldi]

- Def : endomorphisme normal
- Def : matrice normale
- Ex : les similitudes sont normales
- Prop : si $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal, alors pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$
- Lemme : si $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal, alors l'orthogonal de tout sous-espace propre de u est stable par u

- Lemme : si $\dim E = 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal et n'a pas de valeur propre réelle, alors pour toute base orthonormée B de E, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
- Thm : réduction des endomorphismes normaux
- Cor : formulation matricielle

3. Endomorphismes orthogonaux

3.1. Généralités [Rombaldi]

- Def : $u \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie lorsqu'elle conserve le produit scalaire
- Notation : $\mathrm{O}(E)$
- Prop : $u : E \to E$ est une isométrie ssi elle est linéaire et conserve la norme
- Prop : $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$
- Prop : si $u \in \mathrm{O}(E)$ et $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u
- Prop : $u \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie ssi pour toute base orthonormée B de E, $u(B)$ est une base orthonormée de E

3.2. Point de vue matriciel [Rombaldi, Szpirglas]

- Def : $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque $M^T M = I_n$
- Notation : $\mathrm{O}(n)$
- Thm : si $u \in \mathscr{L}(E)$ a pour matrice M dans une base orthonormée, s'équivalent :
  - u est une isométrie
  - M est orthogonale
- Cor : si $u \in \mathrm{O}(E)$, alors $\det u = \pm 1$
- Def : $\mathrm{SO}(E)$ et $\mathrm{SO}(n)$, isométries directes/indirectes
- Ex : classification des éléments de $\mathrm{SO}(2)$ et $\mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$, caractère abélien de $\mathrm{SO}(2)$
- Rmq : suite exacte $1 \to \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{O}(n) \to \{-1, 1\} \to 1$
- Thm : réduction des endomorphismes orthogonaux
- Cor : formulation matricielle

3.3. Considérations topologiques [Szpirglas]

3.3.1. Groupe orthogonal

- Prop : $\mathrm{O}(n)$ est un groupe topologique compact
- App : décomposition polaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{O}(n) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

3.3.2. Groupe spécial orthogonal

- Prop : $\mathrm{SO}(n)$ est connexe par arcs
- Prop : $\mathrm{SO}(2) \cong \mathbb{S}^1$
- Thm : $\mathrm{SU}(2)/\{-I_2, I_2\} \cong \mathrm{SO}(3)$

Annexe

- Quelques dessins de rotations et réflexions