Développements :

- Réduction des endomorphismes normaux
- Loi d'inertie de Sylvester

Références :

- Algèbre, Gourdon
- Algèbre linéaire, Grifone
- Mathématiques pour l'agrégation, Rombaldi
- Réduction des endomorphismes, Mansuy, Mneimné

On fixe un espace vectoriel E sur un corps K.

1. Bases et dimension d'un espace vectoriel [Gourdon, Grifone]

- Familles libres, génératrices, bases
- Résultats fondamentaux sur la dimension
- Somme, somme directe, sous-espaces supplémentaires
- Espaces vectoriels quotients

2. Rang [Gourdon, Grifone]

- Rang d'une application linéaire
- Rang d'une matrice

3. Utilisation de la dimension finie

3.1. Formes quadratiques réelles [Rombaldi]

3.2. Réduction des endomorphismes [Mansuy-Mneimné]

3.2.1. Polynômes annulateurs

- Def : on dit que $P \in K[X]$ annule $u \in \mathscr{L}(E)$ lorsque $P(u) = 0$
- Prop : si E est de dimension finie, alors tout endomorphisme de E admet un polynôme annulateur
- Prop : l'ensemble des polynômes annulateurs de $u \in \mathscr{L}(E)$ est un idéal de $K[X]$
- Def : l'unique générateur unitaire de cet idéal est noté π_u et appelé polynôme minimal de u

- Ex : si u est nilpotent, alors $\pi_u = X^k$ où k est l'indice de nilpotence de u
- Prop : si $\pi_u(0) \neq 0$, alors $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $u^{-1} \in K[u]$

3.2.2. Endomorphismes normaux

On suppose dans cette section que $K = \mathbb{R}$ et que E est euclidien.

- Def : endomorphisme normal
- Ex : les endomorphismes orthogonaux ou symétriques sont normaux
- Lemme : si $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal et $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u
- Lemme : si $\dim E = 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal et sans valeur propre réelle, alors pour toute base orthonormée B de E, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
- Thm : réduction des endomorphismes normaux
- Cor : formulation matricielle
- Cor : cas des matrices antisymétriques

4. Extensions de corps [Gozard]

- Degré d'une extension
- Théorème de la base télescopique
- Éléments algébriques