Références :

- Algèbre, Gourdon
- Algèbre - Le grand combat, Berhuy
- Anneaux, corps, résultants, Ulmer
- Réduction des endomorphismes, Mansuy, Mneimné

Développements :

- Suites de Sturm
- Théorème de Gauss-Lucas

On fixe un anneau commutatif unitaire **intègre** A.

1. Généralités

1.1. Définitions et caractérisations [Gourdon]

- Def : si $P \in A[X]$, on dit que $a \in A$ est une racine de P lorsque $P(a) = 0$
- Ex : -1 est racine de $X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$
- Prop : a est racine de P ssi $X - a$ divise P
- Def : on dit que a est racine d'ordre $h \in \mathbb{N}^*$ de P lorsque :
  - $(X-a)^h$ divise P
  - $(X-a)^{h+1}$ ne divise pas P
- Ex : 1 est racine d'ordre 2 de $(X-1)^2(X+3)^4$
- Prop : si $a_1, \dots, a_r \in A$ sont des racines de P deux à deux distinctes d'ordres respectifs $h_1, \dots, h_r$, alors il existe $Q \in A[X]$ tel que $P = (X-a_1)^{h_1} \cdots (X-a_r)^{h_r} Q$
- Cor : si P est de degré $n \geq 1$, alors P admet au plus n racines comptées avec multiplicité
- Rmq : faux si A n'est pas intègre, par exemple $4X \in (\mathbb{Z}/8)[X]$ a 3 racines
- Prop : si K est un corps infini et $P \in K[X]$ vérifie $P(x) = 0$ pour tout $x \in K$, alors $P = 0$
- Rmq : faux si K est fini, par exemple avec $X^q - X \in \mathbb{F}_q[X]$
- Thm : si K est de caractéristique nulle et $P \in K[X]$, alors $x \in K$ est racine d'ordre h de P ssi :
  - $F(x) = F'(x) = \cdots = F^{(h-1)}(x) = 0$
  - $F^{(h)}(x) \neq 0$

1.2. Fonctions des racines, fonctions symétriques élémentaires [Gourdon, Ulmer]

- Def : polynôme scindé
- Thm : relations coefficients/racines
- Def : on dit que $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ est symétrique lorsque $P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P$ pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$
- Ex : $X^3 + Y^3 + Z^3 \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ est symétrique
- Def : polynômes symétriques élémentaires $\Sigma_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} X_{i_1} \cdots X_{i_j}$
- Ex : $\Sigma_1 = X_1 + \ldots + X_n$, $\Sigma_2 = \sum_{i<j} X_i X_j$, $\Sigma_n = X_1 \cdots X_n$
- Thm : si $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ est symétrique, alors il existe un unique $Q \in A[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P = Q(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$
- Ex : dans $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$, $X^3 + Y^3 + Z^3 = \Sigma_1^3 - 3\Sigma_1\Sigma_2 + 3\Sigma_3$

1.3. Racines et irréductibilité [Berhuy]

- Lemme : pour tout $a \in A$, $X - a \in A[X]$ est irréductible
- Rmq : on a même un isomorphisme d'anneaux $A[X]/(X - a) \cong A$ via l'évaluation en a
- Rmq : faux si A n'est pas intègre, par exemple $X = (3X - 2)(-2X + 3) \in (\mathbb{Z}/6)[X]$
- Prop : si $P \in A[X]$ admet une racine dans A et $\deg P \geq 2$, alors P n'est pas irréductible
- Prop : si K est un corps et $P \in K[X]$ est de degré 2 ou 3, alors P est irréductible ssi P n'a pas de racine dans K
- Rmq :
  - faux si $\deg P \geq 4$, par exemple avec $P = (X^2 + 1)^2 \in \mathbb{R}[X]$
  - faux si K n'est pas un corps, par exemple avec $P = 2(X^2 + 1) \in \mathbb{Z}[X]$

2. Adjonction de racines

2.1. Corps de rupture [Gozard]

- Def : corps de rupture
- Ex : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un corps de rupture de $X^2 - 2$ sur $\mathbb{Q}$
- Thm : si K corps et $P \in K[X]$ irréductible, alors :
  - P admet un corps de rupture
  - deux corps de rupture sont isomorphes, à unique isomorphisme près
- Ex : construction de $\mathbb{C}$
- Ex : construction de $\mathbb{F}_4$ (cf. annexe)
- Cor : si $P \in K[X]$ de degré ≥ 1, alors il existe une extension de K dans laquelle P a une racine

2.2. Corps de décomposition [Gozard]

- Def : corps de décomposition

- Ex : $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ est un corps de décomposition de $X^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$
- Thm : si K corps et $P \in K[X]$ de degré ≥ 1, alors :
  - P admet un corps de décomposition L vérifiant $[L : K] \leq n!$
  - deux corps de décomposition sont isomorphes
- Rmq : un corps de rupture n'est pas un corps de décomposition en général, par exemple avec l'extension $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$

3. Applications en algèbre linéaire [Mansuy-Mneimné]

On considère un K-espace vectoriel E de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

- Prop : les valeurs propres de u sont exactement les racines de son polynôme minimal
- Prop : les valeurs propres de u sont exactement les racines de son polynôme caractéristique
- Cor : si K est algébriquement clos, alors u admet une valeur propre (en particulier vrai lorsque $K = \mathbb{C}$)
- Prop : si le polynôme caractéristique de u est scindé, alors :
  - la trace de u est la somme de ses valeurs propres (comptées avec multiplicité)
  - le déterminant de u est leur produit (idem)

4. Localisation de racines

4.1. Disques de Gershgörin [Mansuy-Mneimné, Ulmer]

- Def : on dit que $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est à diagonale strictement dominante lorsque $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$
- Thm (Hadamard) : si A est à diagonale strictement dominante, alors A est inversible
- Cor : les valeurs propres complexes de A appartiennent à la réunion de ses disques de Gershgörin
- App : si $P = \sum a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$ racine de P, alors $|z| \leq 1 + \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} \left| \dfrac{a_i}{a_n} \right|$

4.2. Suites de Sturm [Ulmer]

- Def : pour $f \in \mathbb{R}[X]$ et $a < b$ non racines de f, une suite de Sturm pour f sur $[a, b]$ est une suite $(f_0, \dots, f_r)$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que :
  - $f_0 = f$
  - f_r est sans racine dans $[a, b]$
  - si $f(x) = 0$, alors $f_0 f_1$ est strictement croissante au voisinage de x
  - pour tout $i \in \{1, \dots, r-1\}$, si $f_i(x) = 0$ alors $f_{i-1}(x) f_{i+1}(x) < 0$

- Thm (Sturm) : si $s = (f_0, \dots, f_r)$ est une suite de Sturm pour f sur $[a, b]$, alors le nombre de racines distinctes de f dans $[a, b]$ est $\sigma_s(a) - \sigma_s(b)$, où $\sigma_s(x)$ est le nombre de changements de signes dans la suite $s(x) = (f_0(x), \dots, f_r(x))$
- Thm : si $f \in \mathbb{R}[X]$ sans facteur carré et $a < b$ non racines de f, la suite définie par :
  - $f_0 = f$
  - $f_1 = f'$
  - tant que possible, $f_{i-1} = f_i q_i - f_{i+1}$ (division euclidienne de f_{i-1} par f_i)
    est une suite de Sturm pour f sur $[a, b]$

4.3. Théorème de Gauss-Lucas [X-ENS ALG1]

- Thm : Gauss-Lucas
- App : 7 est le plus grand entier $n \geq 2$ tel que toutes les racines non nulles de $(X+1)^n - X^n - 1$ soient de module 1
- App : si $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ droite délimitant deux demi-espaces ouverts H_1 et H_2 tels que P' ait une racine dans H_1, alors $P(H_1) = \mathbb{C}$

Annexe

- Des disques de Gershgörin
- Un exemple de suite de Sturm
- Table de $\mathbb{F}_4$