Développements :

- Cyclicité de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$
- Simplicité du groupe alterné

Références :

- Algèbre - Tome 2 - Groupes, Szpirglas
- Cours d'algèbre, Perrin
- Mathématiques pour l'agrégation, Rombaldi
- Théorie des groupes, Ulmer

On fixe un groupe G et une partie $X \subseteq G$.

0. Sous-groupe engendré par une partie [Szpirglas, Ulmer]

- Def : sous-groupe de G engendré par X, noté $\langle X \rangle_G$ ou $\langle X \rangle$
- Def : partie génératrice de G
- Ex : $\langle 4, 14 \rangle_\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$
- Ex : $D(G) = \langle \{[x, y] \mid x, y \in G\} \rangle$
- Prop : le sous-groupe engendré par X est l'ensemble des mots de longueur finie formés des $x \in X$ et des x^{-1}

1. Groupes monogènes, groupes cycliques [Perrin, Szpirglas, Ulmer]

- Def : groupe monogène, groupe cyclique
- Ex : $\langle i \rangle$ est un sous-groupe cyclique d'ordre 4 de $\mathbb{C}^\times$
- Thm : un sous-groupe monogène est
  - isomorphe à $\mathbb{Z}$ si infini
  - isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si fini d'ordre n
- Prop : les générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont les classes des entiers premiers avec n
- Cor : $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| = \varphi(n)$
- Cor : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$
- Thm : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique ssi :
  - $n = 4$
  - il existe p premier impair et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = p^\alpha$ ou $n = 2p^\alpha$

- Thm de structure des groupes abéliens finis (admis)

2. Groupe symétrique

On fixe un entier $n \geq 2$.

2.1. Cycles et générateurs de $\mathfrak{S}_n$ [Rombaldi, Szpirglas]

- Def : on dit que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un r-cycle lorsqu'il existe une partie $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ telle que :
  - $\sigma(x_k) = x_{k+1}$ pour tout $k \in \{1, \dots, r-1\}$
  - $\sigma(x_r) = x_1$
  - $\sigma(x) = x$ pour tout $x \notin \{x_1, \dots, x_r\}$
    et on le note alors $(x_1 \ \cdots \ x_r)$
- Def : une transposition est un 2-cycle
- Lemme : tout r-cycle est produit de $r-1$ transpositions
- Thm : les éléments suivantes engendrent $\mathfrak{S}_n$:
  - les transpositions
  - les $(1 \quad i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$
  - les $(i \quad i+1)$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$
  - $(1 \quad 2)$ et $(1 \quad 2 \quad \cdots \quad n)$
- Rmq : comme $\mathfrak{S}_n$ n'est pas abélien (donc en particulier pas cyclique) lorsque $n \geq 3$, ce dernier système a un nombre minimal de générateurs

2.2. Générateurs de $\mathfrak{A}_n$ [Szpirglas]

- Lemme : si $i, j, k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ sont distincts, alors :
  - $(i \quad j)\,(j \quad k) = (i \quad j \quad k)$
  - $(i \quad j)\,(k \quad \ell) = (i \quad j \quad k)\,(j \quad k \quad \ell)$
- Thm : $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles
- Prop : les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ si $n \geq 5$

2.3. Structure de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ [Perrin, Szpirglas]

- Prop : le centre de $\mathfrak{S}_n$ est égal à $\mathfrak{S}_n$ pour $n \leq 2$, et trivial pour $n \geq 3$
- Thm : si $n \neq 4$, alors $\mathfrak{A}_n$ est simple
- Cor : si $n \geq 5$, alors $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ et $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$
- Cor : si $n \neq 3$, alors les sous-groupes distingués non triviaux de $\mathfrak{S}_n$ sont $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$
- Cor : un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$

3. Groupe linéaire et sous-groupes remarquables

3.1. Dilatations et transvections [Szpirglas]

- Def : une dilatation d'hyperplan H de droite D et de rapport $\lambda \in K \setminus \{0,1\}$ est un élément $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $H = \ker(u - \mathrm{id}_E)$ et $D = \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$
- Def : si $\lambda = -1$, on dit que u est une réflexion
- Prop : s'équivalent :
  - u est une dilatation
  - $\det u \neq 1$
  - u admet une valeur propre $\neq 1$
  - u est diagonalisable et $u \neq \mathrm{id}_E$
  - $\mathrm{im}(u - \mathrm{id}_E) \not\subset H$
  - dans une certaine base, u a pour matrice $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, \lambda)$ avec $\lambda \in K \setminus \{0,1\}$
- Def : une transvection est un élément de $\mathrm{SL}(E)$ fixant un hyperplan
- Prop : pour H hyperplan de E, s'équivalent :
  - u est une transvection
  - u est de la forme $u(x) = x + f(x)a$ avec $H = \ker f$ et $a \in H \setminus \{0\}$
  - u n'est pas diagonalisable
  - $\det u = 1$ et $u \neq \mathrm{id}_E$
  - $\mathrm{im}(u - \mathrm{id}_E) \subseteq H$
  - dans une certaine base, u a pour matrice $I_n + E_{n-1,n}$
- Thm : $\mathrm{SL}(E)$ est engendré par les transvections
- Thm : $\mathrm{GL}(E)$ est engendré par les dilatations et les transvections

3.2. Point de vue matriciel et topologie [Rombaldi]

- Def : matrices élémentaires de dilatation/transvection
- Thm : pivot de Gauss
- Cor : $\mathrm{SL}_n(K)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(K)$) est engendré par les matrices élémentaires de transvection (resp. de dilatation et de transvection)
- App : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs

3.3. Groupes orthogonaux [Perrin, Szpirglas]

- Def : une réflexion est une dilatation de rapport -1
- Def : un renversement est une symétrie parallèlement à un plan
- Thm (Cartan-Dieudonné) : si $\dim E \geq 3$, alors tout élément de $\mathrm{O}(E)$ est produit d'au plus $\dim E$ réflexions

- Cor : si $\dim E \geq 3$, alors tout élément de $\mathrm{SO}(E)$ est produit d'au plus $\dim E$ renversements
- Thm : $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions
- Thm : $\mathrm{SO}(E)$ est engendré par les renversements
- App : $\mathrm{SU}(2)/\{-I_2, I_2\} \cong \mathrm{SO}(3)$