Développements :

- Simplicité du groupe alterné
- Isomorphismes exceptionnels

Références :

- Algèbre - Tome 2 - Groupes, Szpirglas
- Cours d'algèbre, Perrin
- L'oral à l'agrégation, Isenmann, Pecatte
- Mathématiques pour l'agrégation, Rombaldi

On fixe un groupe G.

1. Conjugaison dans un groupe [Perrin]

- Def : action $G \curvearrowright G$ par automorphismes intérieurs définie par $g \cdot x = gxg^{-1}$
- Def :
  - les orbites sont appelées classes de conjugaison de G
  - les éléments d'une même orbite sont dits conjugués
  - le stabilisateur d'un élément s'appelle son centralisateur
- Ex : $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$ sont conjuguées ssi elles sont semblables
- Ex : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $x_1, \dots, x_r \in \{1, \dots, n\}$, alors $\sigma(x_1 \cdots x_r)\sigma^{-1} = (\sigma(x_1) \cdots \sigma(x_r))$
- Ex : les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ si $n \geq 5$

2. Sous-groupes distingués et groupes quotients

On fixe un sous-groupe H de G.

2.1. Classes à gauche, classes à droite [Szpirglas]

- Def : l'ensemble gH (resp. Hg) est appelé classe à gauche (resp. à droite) de H dans G
- Notation : G/H (resp. $H\backslash G$) désigne l'ensemble des classes à gauche (resp. à droite)
- Prop : G/H est en bijection avec $H\backslash G$
- Def : si G est fini, le cardinal de G/H est appelé indice de G dans H et noté $[G : H]$
- Thm : si G est fini, alors $|G| = |H|[G : H]$
- Cor (Lagrange) : si $H \leq G$ et G est fini, alors $|H|$ divise $|G|$
- Cor : si G est fini d'ordre premier, alors G est cyclique

2.2. Sous-groupes distingués [Rombaldi, Szpirglas]

- Def : sous-groupe distingué, groupe simple
- Ex : $\mathfrak{A}_n \trianglelefteq \mathfrak{S}_n$, $\mathrm{SL}_n(K) \trianglelefteq \mathrm{GL}_n(K)$ si K est un corps
- Prop : si H est d'indice 2 dans G, alors $H \trianglelefteq G$
- Thm : il existe une unique structure de groupe sur l'ensemble G/H telle que la projection canonique $G \to H$ soit un morphisme de groupes
- Rmq : si $H \trianglelefteq G$, alors on a toujours une suite exacte $1 \to H \to G \to G/H \to 1$
- Thm : si $\varphi : G \to G'$ est un morphisme de groupes, alors :
  - $\ker \varphi \trianglelefteq G$
  - φ induit un isomorphisme $G/\ker \varphi \to \mathrm{im}\, \varphi$
- App : $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$
- Cor : $|G| = |\ker \varphi|\, |\mathrm{im}\, \varphi|$
- App : dénombrement des carrés de $\mathbb{F}_q$
- Sous-groupes de G/H

2.3. Centre et groupe dérivé [Szpirglas]

- Def : $Z(G)$
- Prop : $Z(G) \trianglelefteq G$
- Rmq : c'est même un sous-groupe caractéristique
- Ex : $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\mathrm{id}\}$ dès que $n \geq 3$
- Ex : $Z(Q_8) = \{-1, 1\}$
- Prop : $G/Z(G) \cong \mathrm{Int}(G)$
- Prop : si $G/Z(G)$ est monogène, alors G est abélien
- Def : $D(G)$
- Prop :
  - $D(G) \trianglelefteq G$
  - $G^{\mathrm{ab}} = G/D(G)$ est abélien
  - si $H \trianglelefteq G$ et G/H est abélien, alors $D(G) \subseteq H$

3. Applications en algèbre et en géométrie

3.1. Les p-groupes [Szpirglas]

- Def : p-groupe
- Prop : si G est un p-groupe, alors $|Z(G)| \geq p$
- Cor : si G est d'ordre p^2, alors G est abélien
- Notation : $X^G = \{x \in X \mid \mathrm{Stab}_G(x) = G\}$
- Prop : si G est un p-groupe, alors $|X| \equiv \left|X^G\right| \bmod p$
- Thm : Cauchy

3.2. Structure des groupes $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ [Perrin, Szpirglas]

- Thm : les éléments suivantes engendrent $\mathfrak{S}_n$:
  - les transpositions
  - les $(1 \quad i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$
  - les $(i \quad i+1)$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$
  - $(1 \quad 2)$ et $(1 \quad 2 \quad \cdots \quad n)$
- Thm : $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles
- Thm : si $n \neq 4$, alors $\mathfrak{A}_n$ est simple
- Cor : si $n \neq 3$, alors les sous-groupes distingués non triviaux de $\mathfrak{S}_n$ sont $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$
- Cor : un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$

3.3. Isomorphismes exceptionnels [Perrin]

- Prop : cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ et associés
- Thm : isomorphismes exceptionnels

3.4. Quaternions [Isenmann-Pecatte, Perrin]

- Thm : il existe une algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, dont une base est $(1, i, j, k)$ vérifiant :
  - 1 est neutre pour la multiplication
  - $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
- Def : on note $\mathbb{H}$ cette algèbre, appelée algèbre des quaternions
- Def : conjugué d'un quaternion
- Prop : l'application $q \longmapsto \overline{q}$ est un anti-automorphisme de $\mathbb{H}$, c'est-à-dire $\mathbb{R}$-linéaire et vérifiant $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} q_1$
- Def : norme d'un quaternion $N(q)$
- Prop : N est multiplicative
- Thm : $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$
- Thm : $\mathrm{SU}(2)/\{-I_2, I_2\} \cong \mathrm{SO}(3)$