Développement : Complété d'un espace métrique

Leçons. 205

Références. *Analyse*, Gourdon

1 Introduction

La complétude est une notion essentielle dans de nombreux théorèmes d'analyse : pour ne citer qu'eux, le point fixe de Picard, la projection sur un convexe fermé dans un Hilbert, le théorème de Baire. Malheureusement, tous les espaces métriques n'ont pas cette merveilleuse propriété, par exemple l'espace $\mathscr{C}^0([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes, lorsque muni de la norme :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x.$$

De manière plus élémentaire, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour la valeur absolue. Oublions $\mathbb{R}$ un instant, et considérons deux rationnels $a \geq 0$ et $x_0 > 0$, puis définissons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la formule de récurrence suivante[1] :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

C'est une suite de Cauchy de nombres rationnels, mais elle ne converge pas dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Observons tout de même son développement décimal avec par exemple $a = 2$ et $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.5 \\ x_2 &= 1.41667 \\ x_3 &= 1.41422 \\ x_4 &= 1.41421 \\ &\vdots \end{aligned}$$

On sent bien que cette suite se rapproche tout de même de quelque chose. En fait :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$$

ce qui n'a pas tellement de sens dans $\mathbb{Q}$ lorsque a n'est pas un carré... Pour y remédier, il faut donc plonger tout ceci dans $\mathbb{R}$, et donc l'avoir construit à partir de $\mathbb{Q}$! Il existe plusieurs tels procédés (qui donnent tous le même corps à isomorphisme près), les deux plus répandus faisant usage l'un des coupures de Dedekind, l'autre des suites de Cauchy.[2] C'est la seconde démarche qui nous intéresse ici, et que l'on va imiter dans un quel espace métrique quelconque pour en « boucher les trous ».

NB : bien sûr, dans ce développement, on suppose le corps $\mathbb{R}$ construit et on ne se privera pas d'en utiliser les propriétés déjà établies « par construction », notamment sa complétude. Ceci nous empêche donc de remplacer l'espace (E, d) par $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ dans la démonstration et de la calquer pour construire $\mathbb{R}$. Bon et le développement ne se recase pas très bien. Mais il est marrant.

[1] C'est la *suite de Héron*, qui permet de calculer les racines carrées de manière géométrique.

[2] Si vous êtes friands d'ultrafiltres, on peut construire grâce à eux les *nombres hyperrationnels*, et obtenir le corps des réels comme quotient de cet ensemble par l'idéal maximal des infinitésimaux.

2 Développement

Le développement est constitué des principales étapes suivantes :

1. on définit une pseudo-distance δ sur l'ensemble $\mathscr{C}(E)$ des suites de Cauchy de E ;
2. on quotiente $\mathscr{C}(E)$ par une relation d'équivalence pour obtenir $\hat{E}$;
3. l'application δ induit une distance $\hat{d}$ sur $\hat{E}$;
4. l'espace (E, d) s'identifie à un sous-espace dense de $(\hat{E}, \hat{d})$;
5. l'espace $(\hat{E}, \hat{d})$ est complet ;
6. il est unique à unique isométrie bijective près.

2.1 Existence du complété

Proposition 1. *Si (E, d) est un espace métrique, alors il existe un espace métrique complet $(\hat{E}, \hat{d})$ et une isométrie $i : E \to \hat{E}$ telle que $i(E)$ soit dense dans $(\hat{E}, \hat{d})$.*

Démonstration. On note $\mathscr{C}(E)$ l'ensemble des suites de Cauchy de E, et on définit, pour $u, v \in \mathscr{C}$:

$$\boxed{\delta(u, v) = \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n).}$$

Cette quantité est tout d'abord bien définie. En effet, pour $p, q \in \mathbb{N}$:

$$d(u_p, v_p) \leq d(u_p, u_q) + d(u_q, v_q) + d(v_p, v_q)$$

c'est-à-dire :

$$d(u_p, v_p) - d(u_q, v_q) \leq d(u_p, u_q) + d(v_p, v_q)$$

et l'inégalité dans l'autre sens donne donc :

$$|d(u_p, v_p) - d(u_q, v_q)| \leq d(u_p, u_q) + d(v_p, v_q) \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0$$

donc comme $\mathbb{R}$ est complet,[3] la suite de Cauchy $(d(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On voit immédiatement que δ est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire : c'est une pseudo-distance, mais pas nécessirement une distance. Pour y remédier, on définit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathscr{C}(E)$ comme suit :

$$u \sim v \iff \delta(u, v) = 0$$

et on définit alors l'ensemble quotient :

$$\boxed{\hat{E} = \mathscr{C}/\!\sim}$$

dans lequel on notera $\overline{u}$ la classe de $u \in \mathscr{C}$. Par construction, $\delta(u, v)$ ne dépend que des classes $\bar{u}$ et $\bar{v}$, ce qui justifie la définition :

$$\boxed{\hat{d}(\bar{u}, \bar{v}) = \delta(u, v).}$$

On définit alors l'application :

$$\begin{aligned} i : E &\longrightarrow \hat{E} \\ x &\longmapsto \overline{(x)_{n\in\mathbb{N}}}. \end{aligned}$$

[3] C'est vraiment juste à cause de ça qu'on ne peut pas calquer la construction pour produire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$.

C'est une isométrie $(E,d) \to (\hat{E},\hat{d})$. En effet, pour tous $x, y \in E$:

$$d(i(x), i(y)) = \lim_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y).$$

Montrons que $i(E)$ est dense dans $(\hat{E},\hat{d})$. Considérons $\alpha = \overline{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in \hat{E}$, et montrons que :

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} i(u_k).$$

Puisque u est une suite de Cauchy, on constate directement que :

$$\lim_{k\to\infty} \hat{d}(\alpha, i(u_k)) = \lim_{k,n\to\infty} d(u_n, u_k) = 0.$$

Montrons maintenant que $(\hat{E},\hat{d})$ est complet. Considérons une suite de Cauchy $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(\hat{E},\hat{d})$. Comme $i(E)$ est dense dans $(\hat{E},\hat{d})$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver $x_n \in E$ tel que :

$$\hat{d}(\alpha_n, i(x_n)) \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, notant $\beta = \overline{i(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in \hat{E}$, il vient :

$$\hat{d}(\alpha_n, \beta) \leq \hat{d}(\alpha_n, i(x_n)) + \hat{d}(i(x_n), \beta) \leq \frac{1}{n+1} + \hat{d}(i(x_n), \beta).$$

Montrons maintenant que la suite $(\hat{d}(i(x_n), \beta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Par construction de β, il suffit de montrer que $(i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme i est une isométrie :

$$d(x_p, x_q) = \hat{d}(i(x_p), i(x_q)) \leq d(i(x_p), \alpha_p) + d(\alpha_p, \alpha_q) + d(i(x_q), \alpha_q).$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$. La suite (α_n) étant de Cauchy dans $(\hat{E},\hat{d})$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\hat{d}(\alpha_p, \alpha_q) \leq \varepsilon$ dès que $p, q \geq N$. Ainsi, au vu de l'inégalité précédente, pour $N_0 \in \mathbb{N}$ assez grand :

$$p, q \geq N_0 \implies d(x_p, x_q) \leq 3\varepsilon$$

ce qui montre la convergence de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers β dans $(\hat{E},\hat{d})$. □

2.2 Unicité du complété

Proposition 2. *Soient (E,d) un espace métrique, $(\hat{E}_1,\hat{d}_1)$ et $(\hat{E}_2,\hat{d}_2)$ deux espaces métriques complets. Supposons qu'il existe des isométries $i_1 : E \to \hat{E}_1$ et $i_2 : E \to \hat{E}_2$ chacune d'image dense. Alors il existe une unique isométrie bijective $(\hat{E}_1,\hat{d}_1) \to (\hat{E}_2,\hat{d}_2)$.*

Démonstration. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : i_1(E) &\longrightarrow \hat{E}_2 \\ i_1(x) &\longmapsto i_2(x). \end{aligned}$$

C'est une isométrie, elle est donc uniformément continue. Comme $i_1(E)$ est dense dans $(\hat{E}_1,\hat{d}_1)$ et $(\hat{E}_2,\hat{d}_2)$ est complet, le théorème de prolongement des applications uniformément continues fournit un prolongement :

$$\varphi : \hat{E}_1 \to \hat{E}_2$$

uniformément continue, qui reste une isométrie par continuité. Il reste donc à montrer qu'elle est surjective.

Considérons $\beta = \overline{(a_k)_{k\in\mathbb{N}}} \in \hat{E}_2$. Par densité de $i(E)$ dans $(\hat{E}_2,\hat{d}_2)$, on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E telle que :

$$\lim_{n\to\infty} i_2(x_n) = \alpha$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{k,n\to\infty} \hat{d}_1(i_1(a_k), i_1(x_n)) = 0.$$

Comme i_1 et i_2 sont des isométries :

$$\hat{d}_1(i_1(x_p), i_1(x_q)) = \hat{d}_2(i_1(x_p), i_2(x_q))$$

donc la suite $(i_1(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace complet $(\hat{E}_1, \hat{d}_1)$. Il existe donc $\alpha \in \hat{E}_1$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} i_1(x_n) = \alpha.$$

Enfin, par continuité de φ :

$$\varphi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \varphi(i_1(x_n)) = \lim_{n\to\infty} i_2(x_n) = \beta. \qquad \square$$