Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité
Préparation à l'agrégation de mathématiques

Giovanni Lebaron

Année universitaire 2025–2026

Table des matières

0 Compacité et espaces métriques **2**

1 Fonctions continues sur un espace compact **2**
1.1 Théorèmes généraux . . . 2
1.2 Continuité uniforme . . . 3
1.3 Théorème d'approximation de Weierstrass . . . 4
1.4 Fonctions holomorphes . . . 5
1.5 Points fixes et suites récurrentes . . . 6

2 Compacité dans les espaces vectoriels normés **8**
2.1 Dans les espaces de dimension finie . . . 8
2.2 Dans les espaces de fonctions continues . . . 9

3 Convergence faible dans les espaces de Hilbert **12**
3.1 Définitions et résultats généraux . . . 12
3.2 Théorème de Banach-Alaoglu . . . 13

Université de Rennes

école normale supérieure rennes

Introduction

La compacité est une notion fondamentale en topologie. C'est souvent une étape clé dans la démonstration de nombreux résultats : certains objets sont par exemple définis comme valeurs d'adhérence de suites, et certaines propriétés *a priori* seulement locales deviennent globales. Par exemple, une fonction localement lipschitzienne sur un espace métrique compact est globalement lipschitzienne.[1] L'objectif de cet exposé est donc d'illustrer diverses applications de cette notion, notamment pour les fonctions continues dans les espaces métriques, pour les espaces vectoriels normés en dimension finie comme en dimension infinie, et dans les espaces de Hilbert via la notion de convergence faible qui remplace le théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension infinie.

0 Compacité et espaces métriques

Nous rappelons tout d'abord la définition générale d'un espace compact, ainsi que la caractérisation d'usage permanent dans les espaces métriques.

Définition 0.1. *On dit qu'un espace topologique (X, T) est* compact *lorsque :*

(i) *(X, T) est séparé ;*

(ii) *X vérifie la* propriété de Borel-Lebesgue *: de tout recouvrement de X par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Proposition 0.2. *Soit (E, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *(E, d) est compact ;*

(ii) *E vérifie la* propriété de Bolzano-Weierstrass *: de toute suite bornée de E on peut extraire une sous-suite convergente.*

En particulier, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles, les segments de $\mathbb{R}$ sont des espaces compacts.

1 Fonctions continues sur un espace compact

1.1 Théorèmes généraux

Commençons par un résultat très important en topologie sur les fonctions continues et la compacité.

Proposition 1.1. *Soit $f : X \to Y$ une fonction continue entre espaces topologiques. Si X est compact, alors $f(X)$ est un compact de Y.*

Corollaire 1.2. *Une bijection continue entre espaces topologiques compacts est un homéomorphisme.*

Par exemple, la fonction continue[2] :

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \mathrm{e}^{2\pi i t} \end{aligned}$$

induit un homéomorphisme :

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

[1] Cela n'est pas totalement évident, et ne découle pas directement de la propriété de Borel-Lebesgue !

[2] Il s'agit du célèbre revêtement universel de $\mathbb{S}^1$.

On savait déjà que ces espaces étaient isomorphes en tant que groupes. Ici, on obtient le caractère topologique, c'est-à-dire la continuité dans les deux sens, gratuitement ! La continuité de p^{-1}, si l'on souhaitait la démontrer « à la main », demanderait de faire appel au logarithme complexe ou à des propriétés fines de l'exponentielle.

Théorème 1.3. *Soient X un espace topologique compact, E un espace métrique, $f : X \to E$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Ce résultat est fondamental, notamment dans l'étude des fonctions de la variable réelle. Il intervient également dans des problèmes d'optimisation de fonctions régulières. Citons deux exemples significatifs :

- une fonction continue et coercive $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ admet toujours un minimum global (on se restreint à une boule fermée, dont nous verrons qu'elle est compacte, en dehors de laquelle f prend des valeurs suffisamment grandes) ;
- une fonction holomorphe $U \to \mathbb{C}$ sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$, lorsque restreinte à un compact $K \subseteq \mathbb{C}$, atteint nécessairement ses extrema sur le bord ∂K, en vertu du principe du maximum.

Théorème 1.4 (Rolle). *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b) = 0$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. La proposition 1.1 permet de considérer $x_0, x_1 \in [a, b]$ tels que :

$$f(x_0) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Si $\{x_0, x_1\} \subseteq \{a, b\}$, alors f est constante sur $[a, b]$ et n'importe quel point intérieur convient alors. Sinon, il existe $c \in]a, b[$ en lequel f possède un extremum. Comme c est un point intérieur, on en déduit $f'(c) = 0$. □

Théorème 1.5 (des accroissements finis). *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction :

$$x \longmapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$ □

Les théorèmes 1.4 et 1.5 deviennent faux dès que le codomaine de f n'est plus inclus dans $\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction p vue précédemment est bien dérivable sur tout segment de $\mathbb{R}$ mais sa dérivée ne s'annule jamais.

1.2 Continuité uniforme

Nous introduisons dans cette section la notion de *continuité uniforme*, qui contrairement à la continuité n'est plus seulement locale. Par défaut, la distance sur un espace métrique E sera notée d_E.

Définition 1.6. *Soient E et F deux espaces métriques. Une fonction $f : E \to F$ est dite* uniformément continue *lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in E^2$:*

$$d_E(x, y) \leq \delta \implies d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Par exemple, toute fonction lipschitzienne est uniformément continue. En revanche, la fonction :

$$\begin{aligned}]0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

est continue, mais pas uniformément continue. Pour le démontrer, remarquons que cela équivaut à l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$ et pour tout $(x, y) \in]0, 1]^2$:

$$|x - y| \leq \delta \quad \text{mais} \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| > \varepsilon.$$

On peut par exemple trouver deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n}\right| > \varepsilon.$$

Dans cet exemple, pour $\varepsilon = 1$, les suites :

$$x_n = \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{2(n+1)^2}$$

conviennent. En fait, ce phénomène ne peut pas se produire sur des espaces métriques compacts.

Théorème 1.7 (Heine). *Une fonction continue sur un espace métrique compact est uniformément continue.*

Démonstration. Supposons que ce ne soit pas le cas et qu'il existe une fonction continue $f : E \to F$ entre espaces métriques, avec E compact, qui ne soit pas uniformément continue. Comme précédemment, on peut donc trouver $\varepsilon > 0$ ainsi que deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_E(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad d_F(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon.$$

Comme E est compact, le théorème 0.2 donne l'existence d'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un élément $\ell \in E$. On déduit de la première inégalité que $(y_{\varphi(n)})$ converge également vers ℓ, donc par continuité de f :

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\ell) \quad \text{et} \quad f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\ell)$$

ce qui contredit la seconde inégalité. □

Corollaire 1.8. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Alors :*

$$\lim_{a\to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$$

où pour $a \in \mathbb{R}^d$, l'opérateur $\tau_a : \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ est défini par $\tau_a f(x) = f(x - a)$.

Démonstration. Preuve détaillée dans [BP06] (p. 260). □

1.3 Théorème d'approximation de Weierstrass

Nous citons dans cette section le théorème dit d'approximation de Weierstrass[3] et nous en donnons une application classique, en lien avec le problème des moments.

Théorème 1.9 (Weierstrass). *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Démonstration. Preuve détaillée dans [Li13] (p. 51). □

[3] À ne pas confondre avec le théorème plus général de Stone-Weierstrass, dont ce que nous montrons est un cas particulier.

Corollaire 1.10. *Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\int_0^1 t^n f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Alors f est nulle sur $[0,1]$.

Démonstration. Par linéarité de l'intégrale, l'hypothèse s'étend en l'égalité :

$$\int_0^1 P(t)f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \tag{1.11}$$

valable pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. De plus, le théorème 1.9 donne l'existence d'une suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Cette convergence uniforme assure :

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 P_k(t)f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)^2\ \mathrm{d}t.$$

Or, chaque $P_k f$ est d'intégrale nulle sur $[0,1]$ d'après l'égalité (1.11). Ainsi, la fonction f^2 est d'intégrale nulle, donc étant continue et positive, elle est nulle. □

1.4 Fonctions holomorphes

Nous évoquons dans cette section le théorème dit d'holomorphie sous l'intégrale, l'analogue du théorème de dérivation sous l'intégrale pour les fonctions de la variable réelle.

Théorème 1.12. *Soient $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré, $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : X \times U \to \mathbb{C}$ une fonction. On suppose que :*

(i) *pour tout $z \in U$, la fonction $x \longmapsto f(x,z)$ est mesurable ;*

(ii) *pour μ-presque tout $x \in X$, la fonction $z \longmapsto f(x,z)$ est holomorphe sur U ;*

(iii) *pour tout compact $K \subseteq U$, il existe une fonction $g_K \in \mathrm{L}^1(X)$ telle que $|f(x,z)| \leq g_K(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$ et pour tout $z \in K$.*

Alors la fonction $F : z \longmapsto \int_X f(x,z)\ \mathrm{d}\mu(x)$ est bien définie et holomorphe sur U. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in U$:

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,z)\ \mathrm{d}\mu(x).$$

Démonstration. Preuve détaillée dans [Amr25] (p. 182). □

Voici une application à l'étude de la *transformée de Mellin*, définie pour $f :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ par[4] :

$$\mathfrak{M}f(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\ \mathrm{d}x.$$

Par exemple, la fonction Gamma d'Euler est la transformée de Mellin de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x.$$

La proposition suivante montre qu'elle est bien définie et holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$.

[4] Cette transformée trouve des applications inattendues en arithmétique, où des identités assez obscures entre des fonctions bien choisies permettent d'améliorer des estimations asymptotiques simples de certaines moyennes de fonctions arithmétiques.

Proposition 1.13. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que :*

(i) $f(x) = \mathrm{O}(x^{-a})$ *lorsque* $x \to 0$;

(ii) $f(x) = \mathrm{O}(x^{-b})$ *lorsque* $x \to +\infty$.

Alors $\mathfrak{M}f(s)$ est bien définie et holomorphe sur la bande $\{s \in \mathbb{C} \mid a < \mathrm{Re}(s) < b\}$.

Démonstration. La continuité de la fonction $g_s(x) = f(x)x^{s-1}$ sur $]0, +\infty[$ est claire. De plus :

$$g_s(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(x^{s-a-1}) \quad \text{et} \quad g_s(x) \underset{x\to\infty}{=} \mathrm{O}(x^{s-b-1})$$

ce qui garantit l'intégrabilité de g_s lorsque $\mathrm{Re}(s) \in]a, b[$. Enfin, g_s est holomorphe et dominée par :

$$h_s(x) = \begin{cases} c_1 x^{\sigma-a-1} & \text{si } x < 1, \\ c_2 x^{\sigma-b-1} & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$. Il reste à appliquer le théorème 1.12. □

1.5 Points fixes et suites récurrentes

Dans les espaces métriques complets, on dispose du théorème de Picard : si (E, d) est un espace métrique complet et $f : E \to E$ est contractante, alors elle admet un unique point fixe $\alpha \in E$ obtenu comme limite de toute suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Cependant, la condition de contraction ne peut être affaibilie sans hypothèse supplémentaire. En supposant seulement que f est 1-lipschitzienne, l'unicité est immédiatement perdue (pour $f = \mathrm{id}_E$ par exemple). Mais même en supposant, pour tous $x, y \in E$:

$$x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

l'existence n'est pas garantie, par exemple avec $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. C'est ici que la compacité intervient.

Proposition 1.14. *Soient (K, d) un espace métrique compact et $f : K \to K$ une fonction telle que, pour tous $x, y \in K$:*

$$x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Alors f admet un unique point fixe $\alpha \in K$. De plus, pour tout $x \in K$, la suite des itérés $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Démonstration. La fonction $g(x) = d(f(x), x)$ est continue sur K, car f est 1-lipschitzienne. Elle admet donc un minimum, atteint disons en $\alpha \in K$. Montrons que α est un point fixe de f. Si ce n'est pas le cas, alors l'hypothèse sur f appliquée à $x = f(\alpha)$ et $y = \alpha$ fournit l'inégalité :

$$d(f(f(\alpha)), f(\alpha)) < d(f(\alpha), \alpha)$$

ce qui contredit la minimalité de g. L'unicité provient également de l'hypothèse sur f. Montrons maintenant que si $x \in K$, alors la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α. Notons $x_n = f^n(x)$ ainsi que $u_n = d(x_n, \alpha)$ et remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = d(x_{n+1}, \alpha) = d(f(x_n), f(\alpha)) < d(x_n, \alpha) = u_n$$

donc (u_n) décroît strictement. Étant positive, elle converge vers un certain réel $\ell \geq 0$. S'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \alpha$, alors u stationne à α et c'est terminé. Sinon, supposons par l'absurde $\ell > 0$ et notons que par décroissance, $u_n \geq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, par compacité de K, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers β. En particulier :

$$d(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty} d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) = \ell.$$

Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) = d(\alpha, x_{\varphi(n)+1}) = u_{\varphi(n)+1} \geq \ell$$

tandis que, comme $f(\alpha) = \alpha$:

$$d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(\alpha, f(\beta)) < d(\alpha, \beta) = \ell.$$

On doit donc avoir $\ell = 0$, donc α est l'unique valeur d'adhérence de (x_n). □

Ce résultat est faux si K est seulement supposé complet. Un contre-exemple est donné par la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ x + \frac{1}{x+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 1.15. *Soient E un espace vectoriel normé, $K \subseteq E$ une partie compacte convexe non vide, et $f : K \to K$ une fonction telle que, pour tous $x, y \in K$:*

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y).$$

Alors f admet un point fixe dans K.

Démonstration. Comme K n'est pas vide, on peut considérer un élément $a \in K$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit alors la fonction $f_n : K \to E$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) + \frac{a}{n}. \tag{1.16}$$

Comme K est convexe, chaque fonction f_n est bien à valeurs dans K, et lipschitzienne de rapport $1 - 1/n$. La proposition 1.14 fournit alors l'existence d'un unique point fixe x_n de f_n, ce qui définit une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans K. La compacité de K permet alors d'en extraire une sous-suite convergente :

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in K.$$

Montrons que ℓ est un point fixe de f. L'égalité (1.16) donne :

$$f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right) f(x_{\varphi(n)}) + \frac{a}{\varphi(n)}$$

c'est-à-dire, comme chaque $x_{\varphi(n)}$ est un point fixe de $f_{\varphi(n)}$:

$$x_{\varphi(n)} = \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right) f(x_{\varphi(n)}) + \frac{a}{\varphi(n)}.$$

Par continuité de f et puisque $\varphi(n) \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, on en déduit $\ell = f(\ell)$. □

2 Compacité dans les espaces vectoriels normés

2.1 Dans les espaces de dimension finie

Le théorème suivant est fondamental dans les espaces de dimension finie. Il permet de s'affranchir de nombreuses considérations quant à la continuité des fonctions considérées : cette notion ne dépend alors plus de la norme ! Lorsqu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}^d$ est différentiable en $a \in U$, on peut par exemple écrire :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \mathrm{o}(h)$$

sans se préoccuper de la norme qui définit le « $\mathrm{o}(h)$ », alors que ce serait crucial en dimension infinie.

Théorème 2.1. *Sur un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 2.2. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées bornées.*

Par exemple, le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$ est compact, en tant que partie fermée bornée de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, espace de dimension finie n^2 sur $\mathbb{R}$. Cela permet de montrer que l'application de *décomposition polaire* réelle :

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) &\longmapsto OS \end{aligned}$$

est un homéomorphisme, et se prolonge même en une surjection $\mathrm{O}(n) \times \mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

De même, le groupe unitaire $\mathrm{U}(n)$ est compact, et on obtient un homéomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) \times \mathrm{H}_n^{++}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ (U, H) &\longmapsto UH \end{aligned}$$

qui se prolonge en une surjection $\mathrm{U}(n) \times \mathrm{H}_n^{+}(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Le théorème suivant permet de caractériser les espaces de dimension finie à l'aide de leur boule unité.

Théorème 2.3 (Riesz). *Soit E un espace vectoriel normé. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est de dimension finie ;*

(ii) *la boule unité fermée de E est compacte.*

Corollaire 2.4. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Alors toute partie compacte de E est d'intérieur vide.*

Démonstration. Soit K une partie compacte de E. Si K n'est pas d'intérieur vide alors on peut trouver une boule ouverte $B(x_0, r) \subseteq K$ avec $x_0 \in E$ et $r > 0$. La boule fermée $\overline{B}(x_0, r/2)$ est alors une partie fermée du compact K, elle est donc compacte. Étant homéomorphe à la boule unité fermée de E, sa compacité contredit le théorème de Riesz puisque E est de dimension infinie. □

Proposition 2.5. *Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $K \subseteq E$ une partie compacte. Alors l'enveloppe convexe de K est une partie compacte de E.*

Ce résultat, qui repose sur le théorème de Carathéodory, n'est plus vrai en dimension infinie.[5]

[5] On pourra trouver un contre-exemple dans ce post sur StackExchange.

2.2 Dans les espaces de fonctions continues

Dans cette section, on s'intéresse aux fonctions continues entre deux espaces métriques[6] E et F. Lorsque E est compact, on peut munir l'espace de fonctions $\mathscr{C}^0(E,F)$ de la distance d_∞ définie par :

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in E} d_F(f(x),g(x)).$$

Nous allons voir que les parties compactes de $\mathscr{C}^0(E,F)$ ne sont pas exactement les parties fermées bornées, et pour cause, cet espace est souvent de dimension infinie lorsque E et F sont eux-mêmes des espaces vectoriels normés, même de dimension finie. En effet, $\mathbb{R}[X]$ s'injecte par exemple dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

C'est la notion d'*équicontinuité* qui va nous permettre de caractériser les parties compactes de $\mathscr{C}^0(E,F)$.

Définition 2.6. *Soient E et F deux espaces métriques et $A \subseteq \mathscr{C}^0(E,F)$. On dit que A est* uniformément équicontinue *lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in E^2$:*

$$d_E(x,y) \leq \delta \implies \sup_{f\in A} d_F(f(x),f(y)) \leq \varepsilon.$$

Par exemple, une famille de fonctions uniformément lipschitziennes sur E est uniformément équicontinue.

Théorème 2.7 (Arzelà-Ascoli). *Soient E un espace métrique compact, F un espace métrique complet, et une partie $A \subseteq \mathscr{C}^0(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est relativement compacte dans $\mathscr{C}^0(E,F)$;*

(ii) *A est uniformément équicontinue et ponctuellement relativement compacte.*

Démonstration. Supposons tout d'abord A relativement compacte et considérons $\varepsilon > 0$. Comme A est relativement compacte, elle est précompacte, donc il existe $f_1,\dots,f_p \in A$ telles que :

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(f_i,\varepsilon)$$

où $B(f_i,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte centrée en f_i de rayon ε dans $\mathscr{C}^0(E,F)$. Chaque fonction f_i est continue sur E, donc uniformément continue d'après le théorème 1.7 par compacité de E. Il existe donc $\delta_i > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$d(x,y) \leq \delta_i \implies d(f_i(x),f_i(y)) \leq \varepsilon.$$

Posons $\delta = \min(\delta_1,\dots,\delta_p) > 0$. Si $x,y \in E$ et $f \in B(f_{i_0},\varepsilon)$ pour $i_0 \in \{1,\dots,n\}$, alors :

$$d(x,y) \leq \delta \implies d(f(x),f(y)) \leq d(f(x),f_{i_0}(x)) + d(f_{i_0}(x),f_{i_0}(y)) + d(f_{i_0}(y),f(y)) \leq 3\varepsilon$$

ce qui montre l'uniforme équicontinuité de A. Considérons maintenant $x \in E$ et montrons que l'ensemble :

$$A_x = \{f(x) \mid f \in A\}$$

est relativement compact. Définissons la fonction :

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_x : \mathscr{C}^0(E,F) &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Elle est clairement 1-lipschitzienne, donc continue. D'après la proposition 1.1, comme $\overline{A}$ est un compact, son image $\mathrm{ev}_x(\overline{A})$ l'est également. Puisque ev_x est continue, on a également :

$$\overline{A_x} \subseteq \mathrm{ev}_x(\overline{A})$$

[6] Il existe des résultats similaires pour divers espaces de fonctions, par exemple le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov pour les espaces $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$.

donc $\overline{A_x}$ est un fermé dans un compact, ce qui conclut.

Supposons maintenant A uniformément équicontinue et ponctuellement relativement compacte. Considérons une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A, et montrons qu'elle admet une sous-suite convergente dans $\mathscr{C}^0(E,F)$. Comme E est un espace métrique compact, il est séparable. Il existe donc une partie dénombrable dense :

$$D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq E.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, comme A_{x_k} est relativement compact, il existe une sous-suite $(f_{\varphi_k(n)}(x_k))$ de $(f_n(x_k))$ qui converge vers un élément $\ell_k \in F$. Par extraction diagonale, on construit alors $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f_{\psi(n)}(x_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_k.$$

Ceci permet de définir $f : D \to F$ comme suit :

$$f(x_k) = \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(x_k) = \ell_k.$$

Montrons maintenant que f se prolonge en une fonction continue sur E, limite uniforme de la suite $(f_{\psi(n)})$. Soient $x \in E$ et $(y_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans D qui converge vers x. Montrons que $f(y_\ell)$ converge dans F, c'est-à-dire qu'elle est de Cauchy.[7] Étant donné $\varepsilon > 0$, par équicontinuité uniforme de A, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $z, z' \in E$ et $f \in A$:

$$d(z,z') \leq \delta \implies d(f(z), f(z')) \leq \varepsilon. \tag{2.8}$$

Comme (y_ℓ) converge, elle est de Cauchy. Il existe donc $L \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $\ell, \ell' \in \mathbb{N}$:

$$\ell, \ell' \geq L \implies d(y_\ell, y_{\ell'}) \leq \delta.$$

En passant à la limite dans l'implication (2.8) appliquée à $f = f_{\varphi(n)}$, on obtient :

$$d(f(y_\ell), f(y_{\ell'})) \leq \varepsilon$$

ce qui montre la convergence de $(f(y_\ell))$. De plus, sa limite ne dépend que de x, et pas de la suite (y_ℓ) choisie pour approcher x. On peut alors prolonger f en posant :

$$f(x) = \lim_{\ell\to\infty} f(y_\ell).$$

Montrons que $f \in \mathscr{C}^0(E,F)$. Considérons pour ce faire $\varepsilon > 0$, deux éléments $x, x' \in E$ ainsi que deux suites $(y_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ et $(y'_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D qui convergent respectivement vers x et x'. Soit $\delta > 0$ associé à $\varepsilon > 0$ par équicontinuité uniforme de A. On suppose que $d(x,x') \leq \delta/2$. Puisque $y_\ell \to x$ et $y'_\ell \to x'$, on peut considérer $L \in \mathbb{N}$ tel que $d(y_\ell, y''_\ell) \leq \delta$ dès que $\ell \geq L$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\ell \geq L \implies d(f_{\psi(n)}(y_\ell), f_{\psi(n)}(y'_\ell)) \leq \varepsilon.$$

En faisant $n \to \infty$, on obtient, pour tout entier $\ell \geq L$:

$$d(f(y_\ell), f(y'_\ell)) \leq \varepsilon.$$

d'où la continuité de f. Reste à montrer que $f_{\psi(n)} \to f$ uniformément sur E. Soient $\varepsilon > 0$, $\delta' > 0$ obtenu par uniforme équicontinuité de A, et $\delta'' > 0$ obtenu par uniforme continuité de f (compacité de E et théorème 1.7). Par densité de $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, on dispose du recouvrement :

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_E(x_n, \delta)$$

[7] Rappelons que l'espace F est supposé complet !

où $\delta = \min(\delta', \delta'')$ et $B_E(x_n, \delta)$ désigne la boule centrée en x_n et de rayon δ dans E. Par compacité de E, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini :

$$E = \bigcup_{i=1}^{r} B_E(y_i, \delta).$$

Soient $x \in E$ et $j_0 \in \{1, \dots, r\}$ tels que $x \in B_E(y_{j_0}, \delta)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d(f_{\psi(n)}(x), f(x)) \leq d(f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(y_{j_0})) + d(f_{\psi(n)}(y_{j_0}), f(y_{j_0})) + d(f(y_{j_0}), f(x)).$$

On considère alors $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $j \in \{1, \dots, K\}$ et pour tout $n \geq N$:

$$d(f_{\psi(n)}(y_j), f(y_j)) \leq \varepsilon.$$

Par définition de δ' et δ'', on a donc $d(f_{\psi(n)}(x), f(x)) \leq 3\varepsilon$ dès que $n \geq N$. D'où le résultat. □

Ce théorème est utile pour montrer la compacité de certains opérateurs, par exemple l'*opérateur de Volterra* défini sur $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ par :

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

C'est un opérateur continu de norme 1. Pour montrer qu'il est compact, il suffit de prouver que $V(\overline{B})$ est une partie relativement compacte de E, où B désigne la boule unité de E. Comme $\mathbb{R}$ est de dimension finie, il suffit de montrer l'uniforme équicontinuité de $V(\overline{B})$. Elle est alors donnée par l'inégalité :

$$|Vf(x) - Vf(y)| \leq |x - y| \, \|f\|_\infty \leq |x - y|$$

valable pour toute fonction $f \in \overline{B}$ et pour tous $x, y \in [0,1]$.

3 Convergence faible dans les espaces de Hilbert

Dans cette section, on considère un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.[8]

3.1 Définitions et résultats généraux

La notion de *convergence faible* vient se substituer à la convergence usuelle dans les espaces de Hilbert.

Définition 3.1. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ et $x \in H$. On dit que (x_n)* converge faiblement *vers x lorsque, pour tout $y \in H$:*

$$\langle x_n, y\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, y\rangle.$$

Par exemple, la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\ell^2(\mathbb{N})$ définie par $e_n = (\delta_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ (où $\delta_{n,p}$ désigne le symbole de Kronecker) converge faiblement vers 0. En effet, si $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle x, e_n\rangle = \sum_{p=0}^{\infty} x_p \langle e_p, e_n\rangle = x_n$$

et comme $\sum x_n^2 < \infty$, on a également $\sum |x_n| < \infty$, ce qui assure que $x_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Proposition 3.2. *Si $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in H$ et vers $y \in H$, alors $x = y$.*

L'unicité donnée par cette proposition permet d'appeler x *la* limite faible de (x_n).

Proposition 3.3. *Si $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement, alors (x_n) est bornée.*

Démonstration. On applique le théorème de Banach-Steinhaus aux formes linéaires $x \longmapsto \langle x, x_n\rangle$. □

Proposition 3.4. *Si $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in H$, alors (x_n) converge faiblement vers x.*

La convergence faible est donc bien une notion plus faible que la convergence usuelle (dite *forte*), et même strictement. Par exemple, la suite (e_n) définie précédemment ne converge pas vers 0, puisque chacun de ses vecteurs est de norme 1. La proposition suivante quantifie en quelque sorte la différence entre ces deux notions.

Proposition 3.5. *Si $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x, alors :*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

De plus, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *(x_n) converge fortement vers x ;*

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$ *;*

(iii) $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = x$.

Démonstration. Tout d'abord, par continuité du produit scalaire :

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle \leq \|x\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|^2.$$

L'équivalence entre les assertions suivantes découle de la formule :

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, x_n\rangle + \|x_n\|^2.$$ □

[8] Bon nombre de résultats de cette section se généralisent aux espaces de Banach, notamment le théorème 3.6 dans les espaces de Banach séparables.

3.2 Théorème de Banach-Alaoglu

Le théorème suivant se substitue au théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension infinie.

Théorème 3.6 (Banach-Alaoglu). *De toute suite bornée de H, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

Démonstration. Preuve détaillée dans [HL99] (p. 100). □

Corollaire 3.7. *Soient $C \subseteq H$ une partie convexe fermée bornée non vide et $J : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable sur C. Alors J admet un minimum global sur C.*

Démonstration. On montre tout d'abord que J est minorée sur C, ce qui donne l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C, telle que :

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{x\in C} J(x) \overset{\text{def}}{=} m \in \mathbb{R}.$$

On montre alors que cette suite (u_n) est bornée, ce qui permet d'en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ faiblement convergente vers un élément $x^* \in H$, à l'aide du théorème 3.6. Enfin, on montre que $x^* \in C$ et que :

$$J(x^*) = m.$$

□

Bibliographie

[Amr25] M. El Amrani, *Analyse complexe*, 2025.

[BP06] M. Briane, G. Pagès, *Théorie de l'intégration*, 2006.

[Gou20] X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, 2020.

[HL99] F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, 1999.

[Li13] D. Li, *Cours d'analyse fonctionnelle*, 2013.