L2 - Algèbre linéaire - TD8 - Correction

M. Cacitti-Holland

2023-2024

Exercice 1.

1. Nous avons

$$P_A = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -a & 1+a-X \end{vmatrix} = (-X)(1+a-X)+a = X^2-(1+a)X+a = (X-1)(X-a).$$

Donc si $a \neq 1$ alors P_A est scindé à racines simples, d'où A est diagonalisable. Si $a = 1$ alors $P_A = (X-1)^2$, donc si A est diagonalisable alors A est semblable à I_2 donc égale à I_2 ce qui n'est pas. Par conséquent A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1$.

2. On suppose $a \neq 1$.

- Soit $X = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{array}{rcl} X \in E_1(A) & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 0 \\ -ax & + & ay & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & x = y. \end{array}$$

Donc $E_1(A) = \text{Vect}\left(\binom{1}{1}\right)$.

- Soit $X = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{array}{rcl} X \in E_a(A) & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -ax & + & y & = & 0 \\ -ax & + & y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & ax = y. \end{array}$$

Donc $E_1(A) = \text{Vect}\left(\binom{a}{1}\right)$.

Par conséquent, d'après la formule de changement de bases,

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec

$$P = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

$\mathcal{B} = \left(\binom{1}{1}, \binom{1}{a}\right)$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Ainsi

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec

$$P^{-1} = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^n = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} 1 & a^n \\ 1 & a^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a-a^n & -1+a^n \\ a-a^{n+1} & -1+a^{n+1} \end{pmatrix}$$

3. (a) Nous avons

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_n \\ (1+a)u_{n+1} - au_n \end{pmatrix} = AU_n.$$

(b) On suppose $a \neq 1$. Par récurrence, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} U_n &= A^n U_0 \\ &= \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a-a^n & -1+a^n \\ a-a^{n+1} & -1+a^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} (a-a^n)u_0+(a^n-1)u_1 \\ (a-a^{n+1})u_0+(a^{n+1}-1)u_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c)
- Si $a \neq 1$ alors, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{a-a^n}{a-1}u_0 + \frac{a^n-1}{a-1}u_1 = \frac{au_0-u_1}{a-1} + \frac{u_1-u_0}{a-1}a^n.$$

Donc
  - Si $|a|<1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{au_0-u_1}{a-1}$.
  - Si $a>1$ et $u_1>u_0$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
  - Si $a>1$ et $u_1<u_0$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
  - Si $u_1=u_0$ alors $u_n = \dfrac{au_0-u_0}{a-1} = u_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_0$.
  - Si $a<-1$ et $u_1 \neq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.
- Si $a=1$ alors, d'après la question 1, la matrice A n'est pas diagonalisable mais $P_A = (X-1)^2$ est scindé donc A est trigonalisable. Nous avons toujours $\binom{1}{1}$ vecteur propre de A associé à 1. On cherche un vecteur $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que $A\binom{x}{y} = \binom{1}{1} + b\binom{x}{y}$, avec $b \in \mathbb{R}$ à choisir, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -bx & + & y & = & 1 \\ -ax & + & (1+a-b)y & = & 1 \end{array} \right.$$

i.e., en choisissant $b=1$,

$$y = 1+x.$$

Donc le vecteur $\binom{0}{1}$ vérifie $A\binom{0}{1} = \binom{1}{1} + \binom{0}{1}$. Ainsi la famille $\mathcal{B} = \left(\binom{1}{1}, \binom{0}{1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et, d'après la formule de changement de bases,

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

avec

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n & n \\ 1-(n+1) & n+1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} 1-n & n \\ 1-(n+1) & n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-n)u_0+nu_1 \\ (1-(n+1))u_0+(n+1)u_1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$u_n = (1-n)u_0 + nu_1 = u_0 + (u_1-u_0)n.$$

Ainsi

– Si $u_0 = u_1$ alors $u_n = u_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_0$.
– Si $u_0 > u_1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
– Si $u_0 < u_1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 2.

1. Nous avons
$$A - I_4 = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Donc
$$\det(A - I_4) = \begin{vmatrix} -9 & -3 & -3 \\ 6 & 2 & 2 \\ 26 & 7 & 9 \end{vmatrix} = (-3)2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$
Donc 1 est valeur propre de A. De même
$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Donc
$$\det(A - 2I_4) = 0.$$
Donc 2 est valeur propre de A.

2. • Soit $e = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors
$$\begin{aligned}
e \in E_1(f) \quad &\iff \quad \begin{cases} -9x - 3y - 3z + t = 0 \\ 6x + 2y + 2z - t = 0 \\ 26x + 7y + 9z - 2t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad t = 0, \begin{cases} -9x - 3y - 3z = 0 \\ 6x + 2y + 2z = 0 \\ 26x + 7y + 9z = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad t = 0, \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 26x + 7y + 9z = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1}{\iff} \quad t = 0, \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \quad t = 0, \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad t = 0, x = -2y, z = -y - 3x = 5y.
\end{aligned}$$
Donc $E_1(f) = \text{Vect}((-2, 1, 5, 0))$.

- Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$
\begin{aligned}
u \in E_2(f) \quad &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -10x & - & 3y & - & 3z & + & t & = & 0 \\ 6x & + & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ 26x & + & 7y & + & 8z & - & 2t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -10x & - & 3y & - & 3z & + & t & = & 0 \\ -4x & - & 2y & - & z & & & = & 0 \\ 6x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -10x & - & 3y & - & 3z & + & t & = & 0 \\ 4x & + & 2y & + & z & & & = & 0 \\ 6x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2, L_3 - 2L_2}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 3y & & & + & t & = & 0 \\ 4x & + & 2y & + & z & & & = & 0 \\ -2x & - & 3y & & & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad t = 0, \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \quad t = 0, \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} & - & 4y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad t = 0, \quad z = 4y, \quad 2x = -3y.
\end{aligned}
$$

  Donc $E_2(f) = \text{Vect}((-3, 2, 8, 0))$.

3. On considère $u = (-3, 2, 8, 0) \in E_2$.

- On cherche $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$f(v) = 2v + u$$

  i.e.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -10x & - & 3y & - & 3z & + & t & = & -3 \\ 6x & + & y & + & 2z & - & t & = & 2 \\ 26x & + & 7y & + & 8z & - & 2t & = & 8 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

  i.e., avec $L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -10x & - & 3y & - & 3z & + & t & = & -3 \\ -4x & - & 2y & - & z & & & = & -1 \\ 6x & + & y & + & 2z & & & = & 2 \end{array} \right.$$

  i.e.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -10x & - & 3y & - & 3z & + & t & = & -3 \\ 4x & + & 2y & + & z & & & = & 1 \\ 6x & + & y & + & 2z & & & = & 2 \end{array} \right.$$

  i.e., avec $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 3y & & & + & t & = & 0 \\ 4x & + & 2y & + & z & & & = & 1 \\ -2x & - & 3y & & & & & = & 0 \end{array} \right.$$

  i.e.

$$3y = -2x, \quad z = 1 - 4x - 2y, \quad t = 0.$$

  Ainsi, par exemple pour $x = -3$ nous avons $y = 2, z = 1 + 12 - 4 = 9, t = 0$. Par conséquent le vecteur

$$v = (-3, 2, 9, 0)$$

  vérifie $f(v) = 2v + u$.

- On cherche maintenant $w = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$f(w) = 2w + v$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -10x & - & 3y & - & 3z & + & t & = & -3 \\ 6x & + & y & + & 2z & - & t & = & 2 \\ 26x & + & 7y & + & 8z & - & 2t & = & 9 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

i.e., avec $L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -10x & - & 3y & - & 3z & + & t & = & -3 \\ -4x & - & 2y & - & z & & & = & -1 \\ 6x & + & y & + & 2z & & & = & 3 \end{array}\right.$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -10x & - & 3y & - & 3z & + & t & = & -3 \\ 4x & + & 2y & + & z & & & = & 1 \\ 6x & + & y & + & 2z & & & = & 3 \end{array}\right.$$

i.e., avec $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & & & + & t & = & 0 \\ 4x & + & 2y & + & z & & & = & 1 \\ -2x & - & 3y & & & & & = & 1 \end{array}\right.$$

i.e.

$$t = 1, \quad 2x = 1 - 3y, \quad z = 1 - 4x - 2y.$$

Ainsi, par exemple pour $y = -1$ nous avons $x = 2, z = 1 - 8 + 2 = -5, t = 1$. Par conséquent le vecteur

$$w = (2, -1, -5, 1)$$

vérifie $f(w) = 2w + v$.

4. On considère $e = (-2, 1, 5, 0)$. Nous avons

$$\begin{array}{rl} \begin{vmatrix} -2 & -3 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\ & \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2, L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ & = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ & = -1 \\ & \neq 0. \end{array}$$

Donc $\mathcal{B} = (e, u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. De plus, comme $f(e) = e, f(u) = 2u, f(v) = 2v + u$ et $f(w) = 2w + v$, nous obtenons

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable car $\dim(E_1(f)) + \dim(E_2(f)) = 1 + 1 \neq 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$.

Exercice 3.

1. On considère le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ non nul. Alors

$$A_t X_1 = (t-1)E_1.$$

Donc $t-1$ est valeur propre de A_t.

2. De la même façon les vecteurs $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ...X_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vérifient

$$A_t X_k = (t-1)E_k, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Or la famille $(X_1, ..., X_{n-1})$ est libre, ainsi $\dim(E_{t-1}) \geq n-1$. Puis le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ non nul vérifie

$$A_t X_n = (t+n-1)X_n.$$

Ainsi $t+n-1$ est également valeur propre de A_t. Remarquons que nous avons $t-1 \neq t+n-1$. Donc A_t admet deux valeurs propres distinctes $t-1, t+n-1$ de multiplicités respectives au moins $n-1$ et au moins 1. Donc leur somme est au moins n. Sauf qu'elle est également au plus n, donc égale à n. Par conséquent A_t est diagonalisable de valeurs propres $t-1$ de multiplicité $n-1$ et $t+n-1$ de multiplicité 1. En particulier

$$P_{A_t} = (t-1-X)^{n-1}(t+n-1-X).$$

3. D'après ce qui précède $E_{t-1}(A_t) = \text{Vect}(X_1, ..., X_{n-1})$ et $\dim(E_{t-1}(A_t)) = n-1$.

4. D'après ce qui précède la matrice A_t est diagonalisable. La matrice A_t est inversible si et seulement si ses valeurs propres sont non nuls. Or les valeurs propres de A_t sont $t-1$ et $t+n-1$. Donc A_t est inversible si et seulement si $t \neq 1$ et $t \neq 1-n$.

Exercice 4. Pour la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- On trouve $P_{A_1} = (1-X)(2-X)^2$.
- P_{A_1} est scindé donc la matrice A_1 est trigonalisable.
- $\text{Sp}(A_1) = \{1, 2\}$.
- Nous avons directement $1 \leq \dim(E_1(A_1)) \leq \alpha_1 = 1$ i.e. $n_1 = \dim(E_1(A_1)) = 1$ et

$$E_1(A_1) = \ker\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(u_1).$$

Puis pour $E_2(A_1)$, soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} u \in E_2(A_1) &\iff A_1 u = 2u \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & z & = & 2x \\ 2x & & & + & z & = & 2y \\ x & - & y & + & 2z & = & 2z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y, z = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$E_2(A_1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(u_2),$$

et $n_2 = \dim(E_2(A_1)) = 1$.

- $n_2 = 1 < 2 = \alpha_2$ donc A_1 n'est pas diagonalisable.
- On cherche $1 = \alpha_2 - n_2$ vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $A_1 u_3 = 2u_3 + a u_2$ avec $a \in \mathbb{R}$. Or nous avons

$$\begin{aligned} A_1 u_3 = 2u_3 + a u_2 &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & z & = & 2x + a \\ 2x & & & + & z & = & 2y + a \\ x & - & y & + & 2z & = & 2z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & a \\ 2x & - & 2y & + & z & = & a \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & z & = & a \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Ainsi on peut choisir $a = 1$ et dans ce cas

$$A_1 u_3 = 2u_3 + u_2 \iff x = y, z = 1.$$

On considère donc le vecteur

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour avoir bien avoir $A_1 u_3 = 2u_3 + u_2$.

- Nous avons alors

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = PTP^{-1}.$$

Nous pouvons donc en déduire son polynôme minimal

$$m_{A_1} = m_T = (X-1)(X-2)^2.$$

Nous pouvions aussi le conclure directement car $m_{A_1} \mid P_{A_1}$, $\text{Sp}(A_1) = \{1, 2\}$ est l'ensemble des racines de m_A et m_A non scindé simple.

Pour la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- On trouve $P_{A_2} = (1-X)^3$.
- P_{A_2} est scindé donc la matrice A_1 est trigonalisable.
- $\mathrm{Sp}(A_2) = \{1\}$.
- Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{array}{rcl} u \in E_1(A_2) & \iff & A_2 u = 1 \times u \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & - & 2z & = & x \\ -x & & & + & z & = & y \\ x & + & y & & & = & z \end{array} \right. \\ & \iff & x + y - z = 0. \end{array}$$

  Il s'agit de l'équation d'un plan donc $n_1 = \dim(E_1(A_2)) = 2$ et

$$E_1(A_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

- $n_1 = 2 < 3 = \alpha_1$ donc A_2 n'est pas diagonalisable. Nous pouvions aussi le voir en écrivant que si A_2 est diagonalisable alors A_2 est semblable à I_3 donc égale à I_3 ce qui n'est pas.
- On cherche $1 = \alpha_1 - n_1$ vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $A_2 u_3 = 1 \times u_3 + a u_1 + b u_2$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

  Or nous avons

$$\begin{array}{rcl} A_2 u_3 = 1 \times u_3 + a u_1 + b u_2 & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & - & 2z & = & x + a + b \\ -x & & & + & z & = & y - a \\ x & + & y & & & = & z + b \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & - & 2z & = & a + b \\ x & + & y & - & z & = & a \\ x & + & y & - & z & = & b \end{array} \right. . \end{array}$$

  Nous devons donc avoir $a = b$. On peut choisir $a = b = 1$ et dans ce cas

$$A_2 u_3 = u_3 + u_1 + u_2 \iff x + y - z = 1.$$

  On considère donc le vecteur

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

  pour bien avoir $A_2 u_3 = 1 \times u_3 + u_1 + u_2$.
- Nous avons alors

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = PTP^{-1},$$

Nous pouvons donc en déduire son polynôme minimal

$$m_{A_2} = m_T = (X-1)^3$$

car $T - I_3, (T - I_3)^2 \neq 0_{n,n}$.

Pour la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

- On trouve $P_{A_3} = (9-X)^3$.
- P_{A_3} est scindé donc la matrice A_3 est trigonalisable.
- $\mathrm{Sp}(A_3) = \{9\}$.
- Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors

$$
\begin{array}{rcl}
u \in E_9(A_3) & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & 5y & - & 2z & = & 0 \\ -2x & - & 2y & - & 8z & = & 0 \\ -5x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & 5y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ -5x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2, L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & 9y & - & 18z & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ & & 9y & + & 18z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

  Donc

$$E_9(A_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(u_1).$$

- $n_9 = 1 < 3 = \alpha_9$ donc A_3 n'est pas diagonalisable.
- On cherche $2 = \alpha_9 - n_9$ vecteurs $u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que $A_3 u_2 = 9u_2 + au_1$ et $A_3 u_3 = 9u_3 + bu_1 + cu_2$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Or nous avons

$$
\begin{array}{rcl}
A_3 u_2 = 9u_2 + au_1 & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & 5y & - & 2z & = & 2a \\ -2x & - & 2y & - & 8z & = & 2a \\ -5x & + & 4y & - & 2z & = & -a \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & 5y & - & 2z & = & 2a \\ x & + & y & + & 4z & = & -a \\ -5x & + & 4y & - & 2z & = & -a \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2, L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & 9y & - & 18z & = & 6a \\ x & + & y & + & 4z & = & -a \\ & & 9y & + & 18z & = & -6a \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 4z & = & -a \\ & & 3y & + & 6z & = & -2a \end{array} \right.
\end{array}
$$

  Par exemple si l'on fixe $a = -3$,

$$A_3 u_2 = 9u_2 + u_1 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 4z & = & 3 \\ & & 3y & + & 6z & = & 6 \end{array} \right.$$

  Donc par exemple si $y = 0, z = 1$ et $x = -1$. On considère donc le vecteur

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour bien avoir $A_3u_2 = 9u_2 - 3u_1$. De plus nous avons

$$\begin{aligned}
A_3u_3 = 9u_3 + bu_1 + cu_2 &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & - & 5y & - & 2z & = & 2b & - & c \\ -2x & - & 2y & - & 8z & = & 2b & & \\ -5x & + & 4y & - & 2z & = & -b & + & c \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & - & 5y & - & 2z & = & 2b & - & c \\ x & + & y & + & 4z & = & -b & & \\ -5x & + & 4y & - & 2z & = & -b & + & c \end{array}\right. \\
&\underset{L_1\leftarrow L_1-4L_2, L_3\leftarrow L_3+5L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & - & 9y & - & 18z & = & 6b & - & c \\ x & + & y & + & 4z & = & -b & & \\ & & 9y & + & 18z & = & -6b & + & c \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 4z & = & -b & & \\ & & 9y & + & 18z & = & -6b & + & c \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Par exemple si l'on fixe $b = 0$ et $c = 9$,

$$A_3u_3 = 9u_3 + 3u_2 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ & & 9y & + & 18z & = & 9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

Donc par exemple si $z = 0, y = 1$ et $x = -1$. On considère donc le vecteur

$$u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour bien avoir $A_3u_3 = 9u_3 + 9u_2$.

- Nous avons alors

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = PTP^{-1}.$$

Nous pouvons donc en déduire son polynôme minimal

$$m_{A_3} = m_T = (X - 9)^3$$

car $T - 9I_3, (T - 9I_3)^2 \neq 0$.

Exercice 5.

1. Nous avons après calculs $P_A = (4 - X)^3(8 - X)$. Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{4, 8\}$. Ainsi $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ d'où A est inversible. De plus

$$\mathrm{rg}(A - 5I_4) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

Donc, d'après le théorème du rang,

$$n_4 = \dim(E_4(A)) = 3 = \alpha_4.$$

Nous avons également $n_8 = \dim(E_8(A)) = 1 = \alpha_8$ car $n_8 \geq 1$ et $n_8 \leq \alpha_8 = 1$. De plus P_A est scindé. Donc, par théorème, A est diagonalisable.

2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $m_A \mid P_A$. Donc

$$m_A = (X - 4)^\alpha (X - 8)^\beta, \quad 0 \leq \alpha \leq 3, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

De plus A est diagonalisable donc le polynôme minimal m_A est scindé simple

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1,$$

Enfin nous avons également que $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des racines de m_A. Donc $\alpha = \beta = 1$ et

$$m_A = (X - 4)(X - 8).$$

3. Nous avons alors

$$0_{n,n} = m_A(A) = (A - 4I_4)(X - 8I_4) = A^2 - 12A + 32I_4.$$

Autrement dit

$$I_4 = \frac{1}{32}(12A - A^2) = \frac{1}{32}(12I_4 - A)A.$$

Ainsi A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{32}(12I_4 - A) = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Nous avons

$$P_A = (1 - X)^2(c - X).$$

- Si $c = 1$ alors $m_A = (1-X)^\alpha$ avec $1 \leq \alpha \leq 3$. Si $\alpha = 1$ alors $m_A = X - 1$ et $0_{3,3} = m_A(A) = A - I_3$ i.e. $A = I_3$ ce qui n'est pas. Donc $\alpha \in \{2, 3\}$ et ainsi m_A n'est pas scindé simple d'où A n'est pas diagonalisable.

- Si $c \neq 1$ alors $m_A = (X - 1)^\alpha(X - c)$ avec $1 \leq \alpha \leq 2$. On suppose que la matrice A est diagonalisable. Alors m_A est scindé simple, i.e. $\alpha = 1$ et $m_A = (X - 1)(X - c)$. Ainsi

$$0_{3,3} = m_A(A) = (A-I_3)(A-cI_3) = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-c & a & 1 \\ 0 & 1-c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a(1-c) & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Donc, comme $c \neq 1$, $a = 0$ et b est un réel quelconque. Réciproquement on suppose que $a = 0$. Alors, d'après le calcul précédent $(A - I_3)(A - cI_3) = 0_{3,3}$. Donc $(X - 1)(X - c)$ annule A, d'où $m_A \mid (X - 1)(X - c)$, puis comme $\{1, c\} = \mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des racines de m_A avec $c \neq 1$, $m_A = (X - 1)(X - c)$ est scindé simple, d'où A est diagonalisable.

En conclusion A est diagonalisable si et seulement si $c \neq 1$ et $a = 0$.

Exercice 7. On suppose que $f^{2020} = 0$ et que f est diagonalisable. Alors $m_f \mid X^{2020}$ et m_f est scindé simple. Donc $m_f = X$, d'où $0_{\mathcal{L}(E)} = m_f(f) = f$.